# 第 1 章　极限与连续

## 1.1　函数

要求：理解分段函数、复合函数、初等函数、反函数、隐函数的概念与特性。

1、填空题

(1) 设 $f(x)$ 为奇函数，且当 $x\geq 0$ 时 $f(x)=\sqrt{x}$，则当 $x<0$ 时

$f(x)=$ $-\sqrt{-x}$；

(2) 函数 $f(x)=\sqrt{3-x}+\arctan\frac{1}{x}$ 的定义域是 $(-\infty,0)\cup(0,3]$；

(3) 函数 $f(x)=\ln(\sqrt{1+x^2}-x)$ 的奇偶性为 奇函数；

(4) 设 $g(x)=\frac{2^x}{2^x+1}$，则其反函数 $g^{-1}(x)=$ $\log_2\frac{x}{1-x}\ (0<x<1)$；

(5) 设 $f(x-\frac{1}{x})=x^2+\frac{1}{x^2}$，则 $f(x)=$ $x^2+2$；

(6) 若 $y=f(u)=e^u$，$u=g(v)=-v^2$ $v=h(w)=\sin w$，

$w=\varphi(x)=\frac{1}{x}$，则复合函数 $y=f(g(h(\varphi(x))))=$ $e^{-\sin^2\frac{1}{x}}$。

2、设 $f(x)=\begin{cases}1 & |x|<1\\ 0 & |x|=1\\ -1 & |x|>1\end{cases}$，$g(x)=\ln x$，求 $f[g(x)]$。

解：$f[g(x)]=f(\ln x)=\begin{cases}1 & \frac{1}{e}<x<e\\ 0 & x=\frac{1}{e}\text{或}e\\ -1 & 0<x<\frac{1}{e}\text{或}x>e\end{cases}$

3、设 $f(x)=\min\{2x+5,x^2,-x+6\}$，试给出 $f(x)$ 的分段表达式，画出 $f(x)$ 的图形，并求 $\max f(x)$。

解：$f(x)=\begin{cases}2x+5 & x\leq 1-\sqrt{6}\\ x^2 & 1-\sqrt{6}<x\leq 2\\ -x+6 & x>2\end{cases}$

$\max f(x)=4$

## 1.2 数列的极限

**要求**：了解数列极限的定义，掌握收敛数列的性质。

1、选择题

(1) 下列命题中正确的是 （ D ）

（A）发散数列必然无界 （B）两个发散数列之和必然发散

（C）两个无界数列之和必然发散 （D）收敛数列必然有界

(2) 设有两数列 $\{x_n\},\{y_n\}$，满足 $x_n = y_{2n}$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$，

则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n =$ （ A ）

（A）$a$ （B）$\dfrac{a}{2}$ （C）$2a$ （D）不存在

2、用数列极限的定义证明：(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+1}{4n+1}=\dfrac{3}{4}$。

证：$\forall\varepsilon>0$，要使 $\left|\dfrac{3n+1}{4n+1}-\dfrac{3}{4}\right|=\dfrac{1}{16n+4}<\dfrac{1}{n}<\varepsilon$

只要 $n>\dfrac{1}{\varepsilon}$，故取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$ 则当 $n>N$ 时有 $\left|\dfrac{3n+1}{4n+1}-\dfrac{3}{4}\right|<\varepsilon$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+1}{4n+1}=\dfrac{3}{4}$

3、若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$，而数列 $\{y_n\}$ 有界，证明：$\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$。

证：因 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$，则对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N_1>0$，当 $n>N_1$ 时

有 $|x_n|<\dfrac{\varepsilon}{M}$

又 $\{y_n\}$ 有界 则 $\exists M>0$ 使得 $|y_n|\le M$

又 $|x_n y_n|\le M|y_n|$

所以对 $\forall\varepsilon>0$，取 $N=N_1$，当 $n>N$ 时有 $|x_n y_n|\le M|y_n|<M\cdot\dfrac{\varepsilon}{M}=\varepsilon$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$

## 1.3 函数的极限

**要求**：掌握函数极限的定义和函数极限的性质。

1、填空题

(1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在是 $f(x)$ 在 $x_0$ 某去心邻域内有界的 充分 条件

(2) $f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 都存在且相等是 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在的 充要 条件

2、用函数极限的定义证明：$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{x+2}=-4$。

证：$\left|\dfrac{x^2-4}{x+2}+4\right|=|x-2+4|=|x+2|$

$\forall\varepsilon>0$，要使 $\left|\dfrac{x^2-4}{x+2}-4\right|<\varepsilon$，只要取 $\delta=\varepsilon$，则

$0<|x+2|<\delta$ 时 就有 $\left|\dfrac{x^2-4}{x+2}-4\right|<\varepsilon$

$\therefore \lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{x+2}=-4$

3、用函数极限的定义证明：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+2x^3}{x^3}=2$。

证：$\left|\dfrac{1+2x^3}{x^3}-2\right|=\left|\dfrac{1}{x^3}\right|=\left(\dfrac{1}{|x|}\right)^3<\varepsilon$

$\forall\varepsilon>0$，取 $X=\dfrac{1}{\sqrt[3]{\varepsilon}}$，则当 $|x|>X$ 时 恒有

$\left|\dfrac{1+2x^3}{x^3}-2\right|<\varepsilon$ 故 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+2x^3}{x^3}=2$



要求：了解无

小的性

选择题

(1) 当 $x\to x_0$

$x\to x_0$ 时

(A) $3\alpha(x)$

(C) $\alpha(x)\beta($

(2) 下列命题

(A)无界量必

(C)无穷大量

(3) $\lim\limits_{x\to x_0} f($

(A) 充分

(C) 充要

要求：掌

1、填空题

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}($

$=\frac{6x}{3x+2}$

## 1.4　无穷小量与无穷大量

**要求**：了解无穷小、无穷大的概念及它们之间的关系，了解无穷小的性质及无穷小与极限之间的关系。

选择题

(1) 当 $x \to x_0$ 时，$\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 均为无穷小量，下列变量中 $x \to x_0$ 时可能不是无穷小量的是　　( D )

(A) $3\alpha(x) - 4\beta(x)$　　(B) $2\alpha(x) + 3\beta(x)$

(C) $\alpha(x)\beta(x)$　　(D) $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ ( $\beta(x) \neq 0$ )

(2) 下列命题正确的是　　( C )

(A)无界量必为无穷大量　　(B)无穷大量的和必为无穷大量

(C)无穷大量必为无界量　　(D)两个无界量的乘积必为无界量

(3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ 是 $x \to x_0$ 时 $(f(x) - A)$ 为无穷小量的( C )

(A) 充分而非必要条件　　(B) 必要而非充分条件

(C) 充要条件　　(D) 既非充分也非必要条件

## 1.5　极限运算法则

**要求**：掌握极限的四则运算法则和复合函数的极限运算法则。

1、填空题

$\frac{n(n+1)}{2(n+2)} - \frac{n}{2} = -\frac{n}{2(n+2)}$

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1+2+\cdots+n}{n+2} - \frac{n}{2}\right) =$ $-\frac{1}{2}$ ；

(2) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{4x^3 - 2x^2 + x}{3x^2 + 2x} =$ $\frac{1}{2}$ ；

(3) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3 - x}{(x-1)^2} =$ $\infty$ ；

(4) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{-x^3 + 2x - 3}{x^3 - 8x^2 + 1} =$ $-1$ ；

(5) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\cos x}{x^2} =$ $0$ 。

有界　无穷小

2、选择题

(1) $f(x)$ 与 $g(x)$ 都是 $x \to x_0$ 时的无穷小量且恒不为 0，则当 $x \to x_0$ 时下列函数必为无穷大量的是　　( D )

(A) $\frac{f(x)}{g(x)}$　　(B) $\frac{g(x)}{f(x)}$

(C) $\frac{1}{f(x)} + \frac{1}{g(x)}$　　(D) $\frac{1}{f(x)} + g(x)$

$-\infty + \infty$

(2) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = B$，则下列结论正确的是　　( D )

(A) $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \frac{B}{A}$

(B) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$　不一定存在

(C) $A = 0$ 时必有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0$

(D) $A \neq 0$ 时必有 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \frac{B}{A}$

3、计算下列极限

(1) $\lim\limits_{h\to0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}$

解：$=\lim\limits_{h\to0}\frac{3x^2h+3h^2x+h^3}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}(3x^2+3hx+h^2)=3x^2$

(2) $\lim\limits_{x\to1}(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3})$

$=\lim\limits_{x\to1}\frac{1+x+x^2-3}{1-x^3}=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x+2)(x-1)}{1-x^3}$

$=-\lim\limits_{x\to1}\frac{x+2}{1+x+x^2}=-1$

(3) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{3-x}}{x^2+x-2}$

$=\lim\limits_{x\to1}\frac{2(x-1)}{(x+2)(x-1)(\sqrt{1+x}+\sqrt{3-x})}$

$=\lim\frac{2}{(x+2)(\sqrt{1+x}+\sqrt{3-x})}=\frac{\sqrt{2}}{6}$

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x(x^2+1-x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2}}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=1$

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^2+\arctan x}{(x+\sin x)^2}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4+\frac{\arctan x}{x^2}}{(1+\frac{\sin x}{x})^2}=4$

(6) 已知 $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2+5x+6}{x+2} & x<-2\\ 0 & x=-2\\ 2x+5 & x>-2\end{cases}$，求 $\lim\limits_{x\to-2}f(x)$。

$\lim\limits_{x\to-2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-2^+}(2x+5)=1$

$\lim\limits_{x\to-2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to-2^-}\frac{x^2+5x+6}{x+2}=\lim\limits_{x\to-2^-}(x+3)=1$

$\therefore\lim\limits_{x\to-2}f(x)=1$

4、已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b)=0$，求 $a$ 和 $b$ 的值。

$\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-ax^2-ax-bx-b}{x+1}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(1-a)x^2-(a+b)x+1-b}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(1-a)x-(a+b)+\frac{1-b}{x}}{1+\frac{1}{x}}=0$

$\Rightarrow\begin{cases}1-a=0\\a+b=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=-1\end{cases}$

姓名 班级 学号

## 1.6 极限存在准则 两个重要极限

**要求**：了解极限存在准则，熟练掌握利用两个重要极限求极限。

1、填空题

(1) 数列 $\{x_n\}$ 单调有界是 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在的 充分 条件；

(2) $\omega\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin\omega x}{\omega x}=$ $\omega$ ，$\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$ = 0 ；

$x$ 无穷小 $\sin\frac{1}{x}$ 有界

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x-1}{x+2})^{x+2}$ $e^{-3}$ ，$\lim\limits_{x\to0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=$ $e^2$ 。

$\lim\limits_{x\to\infty}[(1+\frac{-3}{x+2})^{\frac{x+2}{-3}}]^{-3}$ $\lim\limits_{x\to0}[(1+2x)^{\frac{1}{2x}}]^2$

2、计算下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sin(x^2-1)}{x^2+x-2}$ 或 $=\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-1}{x^2+x-2}=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x+1)(x-1)}{(x+2)(x-1)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{x+1}{x+2}=\frac{2}{3}$

$=\lim\limits_{x\to1}\frac{\sin[(x+1)(x-1)]}{(x+2)(x-1)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{\sin[(x+1)(x-1)]\cdot(x+1)}{(x+2)(x-1)(x+1)}$

$=\lim\limits_{x\to1}\frac{\sin(x^2-1)}{x^2-1}\cdot\frac{x+1}{x+2}=\lim\limits_{x\to1}\frac{\sin(x^2-1)}{x^2-1}\cdot\lim\limits_{x\to1}\frac{x+1}{x+2}=\frac{2}{3}$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}(x\sin\frac{2}{x}+\frac{\sin3x}{x})$

$=\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\frac{2}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin3x}{x}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}2\frac{\sin\frac{2}{x}}{\frac{2}{x}}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sin3x=2$

无穷小 有界

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x}{x+1})^x$

$=\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{1}{1+\frac{1}{x}})^x=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{x})^x}=\frac{1}{e}$

3、用极限准则证明

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\dots+\frac{n}{n^2+n})=\frac{1}{2}$

解 $\frac{1+2+\dots+n}{n^2+n}<\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\dots+\frac{n}{n^2+n}<\frac{1+2+\dots+n}{n^2+1}$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+\dots+n}{n^2+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{2(n^2+n)}=\frac{1}{2}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+\dots+n}{n^2+1}=\frac{n^2+n}{2(n^2+1)}=\frac{1}{2}$

由夹逼准则得 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\dots+\frac{n}{n^2+n})=\frac{1}{2}$

(2) 试证数列 $x_1=\sqrt{3}$，$x_{n+1}=\sqrt{3+x_n}$ ($n=1,2,\dots$)的极限存在。

证：$x_2=\sqrt{3+x_1}>x_1=\sqrt{3}$，假设 $x_k>x_{k-1}$，则有

$x_{k+1}=\sqrt{3+x_k}>\sqrt{3+x_{k-1}}=x_k$ ∴ $\{x_n\}$ 单调递增

又 $x_1=\sqrt{3}<3$ 假定 $x_k<3$ 则 $x_{k+1}=\sqrt{3+x_k}<\sqrt{3+3}<3$

∴ $\{x_n\}$ 是有界的. 故根据单调有界准则知

$\{x_n\}$ 的极限存在.

## 1.7 无穷小的比较

**要求**：熟练掌握无穷小的比较及利用等价无穷小替换求极限。

1、选择题

(1) 当 $x \to 0$ 时，与 $\sqrt{1+x^2}-1$ 等价的无穷小是 （ D ）

(A) $x$ (B) $x^2$ (C) $2x^2$ (D) $\frac{x^2}{2}$

(2)设 $f(x)=\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}$ $= \frac{2x}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$，则当 $x \to 0$ 时成立的 （ A ）

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} = 1$

(A) $f(x)$ 与 $x$ 是等价无穷小 (B) $f(x)$ 与 $x$ 是同阶但不等价无穷小

(C) $f(x)$ 是比 $x$ 高阶的无穷小 (D) $f(x)$ 是比 $x$ 低阶的无穷小

(3) 当 $x \to 0$ 时，$1-\cos x^2$ $\sim \frac{1}{2}(x^2)^2 = \frac{1}{2}x^4$ 是关于 $x$ 的 （ C ） 阶无穷小

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

2、计算下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1-\sin 2x)}{e^{3x}-1}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{-\sin 2x}{3x} = -\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{3x} = -\frac{2}{3}$

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\arctan(x-1)}{e^x-e}$

$\overset{t=\arctan(x-1)}{=\!=}\lim\limits_{t\to 0}\frac{t}{e^{\tan t}\cdot e-e} = \lim\limits_{t\to 0}\frac{t}{e(e^{\tan t}-1)} = \lim\limits_{t\to 0}\frac{t}{e\cdot\tan t}$

$= \lim\limits_{t\to 0}\frac{t}{e\cdot t} = \frac{1}{e}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{(\sqrt[3]{1+x^2}-1)(e^{\sin x}-1)}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x(\cos x-1)}{\frac{1}{3}x^2\cdot\sin x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x(-\frac{1}{2}x^2)}{\frac{1}{3}x^2\cdot x} = -\frac{3}{2}$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\cdot x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{3\frac{\sin x}{x}+x\cos\frac{1}{x}}{1+\cos x}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{3\frac{\sin x}{x}}{1+\cos x} + \lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cos\frac{1}{x}}{1+\cos x} = \frac{3}{2}+0 = \frac{3}{2}$

无穷小 有界

3、若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x}=1$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{f(x)}-e}{x}$。

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{f(x)}-e}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{e(e^{f(x)-1}-1)}{x} = e\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{f(x)-1}-1}{x} = e\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$

## 1.8　函数的连续性与间断点

要求：理解函数连续和间断点的概念，了解初等函数的连续性，了解初等函数的连续性，会判断间断点的类型。

1、填空题

(1) 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{2x}-1}{ax} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,则 $a=$ __2__；

$\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{ax}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2x}{ax}=\frac{2}{a}=f(0)=1$ $\Rightarrow a=2$

(2) 对于函数 $f(x)=\dfrac{x^2-x}{|x|(x^2-1)}$，$x=0$ 是其 __跳跃__ 间断点，

$x=-1$ 是其 __无穷__ 间断点，$x=1$ 是其 __可去__ 间断点。

2、选择题

(1) 函数 $f(x)=\begin{cases}e^{\frac{1}{x}} & x<0\\ x & 0\le x\le 2\\ \dfrac{\sin(2x-4)}{x-2} & x>2\end{cases}$ 的连续区间为　（ B ）

$\lim\limits_{x\to0^-}e^{\frac{1}{x}}=0=\lim\limits_{x\to0^+}x=0=f(0)=0$

$\lim\limits_{x\to2^-}x=2=\lim\limits_{x\to2^+}\frac{\sin(2x-4)}{2x-4}\cdot2=2=f(2)$

(A) $(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$　(B) $(-\infty,+\infty)$ $x=0,2$ 均为连续点．　(C) $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$　(D) $(-\infty,0)\cup(0,2)\cup(2,+\infty)$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-1}{x}$

(2) $x=0$ 是函数 $f(x)=\arctan\dfrac{1}{x}$ 的 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\frac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=-\frac{\pi}{2}$　（ B ）

(A)可去间断点 (B)跳跃间断点 (C)无穷间断点 (D)振荡间断点

(3) $x=0$ 是函数 $f(x)=\dfrac{1}{1-e^{\frac{1}{x}}}$ 的　（ B ）

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0$

$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=1$

(A)可去间断点 (B)跳跃间断点 (C)无穷间断点 (D)振荡间断点

3、计算 $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

$=\lim\limits_{x\to0}\left\{[1+(\cos x-1)]^{\frac{1}{\cos x-1}}\right\}^{\frac{\cos x-1}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}}=e^{-\frac{1}{2}}$

4、设函数 $f(x)=\begin{cases}e^x+a & x<0\\ 2 & x=0\\ \dfrac{\ln(1+bx)}{x} & x>0\end{cases}$ 处处连续，求 $a$ 和 $b$ 。

$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(e^x+a)=1+a$

$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln(1+bx)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{bx}{x}=b$　因 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，故 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=f(0)$

$1+a=b=2\Rightarrow a=1,\ b=2$

5、求下列函数的间断点并说明间断点类型。

(1) $f(x)=\dfrac{x}{\tan x}$

解：$f(x)=\frac{x}{\tan x}$，在 $x=0$，$x=k\pi\ (k\neq0)$，$x=k\pi+\frac{\pi}{2}\ (k\in Z)$ 时函数无定义．

① $\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$　∴ $x=0$ 是可去间断点．

② $\lim\limits_{x\to k\pi}f(x)=\infty$，∴ $x=k\pi\ (k\neq0)$ 是其无穷间断点．

③ $\lim\limits_{x\to k\pi+\frac{\pi}{2}}f(x)=0$，∴ $x=k\pi+\frac{\pi}{2}\ (k\in Z)$ 是可去间断点．

(2) $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{1-x}} & x>0 \\ \ln(1+x) & -1<x\le 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+} e^{\frac{1}{1-x}}=e$

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\ln(1+x)=0\ne\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$

∴ $x=0$ 为跳跃间断点．

$\lim\limits_{x\to1^-} e^{\frac{1}{1-x}}=+\infty$ （ $\lim\limits_{x\to1^+} e^{\frac{1}{1-x}}=0$ ）

$x=1$ 为无穷间断点 （注：在$x=1$处无定义）

6、已知 $f(x)=\dfrac{e^x-b}{(x-a)(x-1)}$ 有无穷间断点 $x=0$ 与可去间断点 $x=1$，求 $a,b$ 的值。

解：$f(x)$ 有无穷间断点 $x=0$ 知

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(x-a)(x-1)}{e^x-b}=\dfrac{a}{1-b}=0 \Rightarrow a=0$

又 $f(x)$ 有可去间断点 $x=1$ 知

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{e^x-b}{x(x-1)}$ 存在 （$\frac{0}{0}$型） $\Rightarrow \lim\limits_{x\to1}(e^x-b)=e-b=0\Rightarrow b=e$

## 1.9 闭区间上连续函数性质

**要求**：掌握闭区间上连续函数的性质。

1、证明：方程 $x=a\cos x+b$ ( $a>0,b>0$ )至少有一个不超过$a$+$b$ 的正根 。

证：令 $f(x)=x-(a\cos x+b)$，则 $f(x)$ 在 $[0,a+b]$ 上连续

又 $f(0)=0-(a\cos0+b)=-(a+b)<0$

若 $f(a+b)=0$ 则 $a+b$ 即为所求，否则则有

$f(a+b)=a+b-[a\cos(a+b)+b]=a-a\cos(a+b)>0$

即 $f(0)\cdot f(a+b)<0$．由零点定理知至少 $\exists\xi\in(0,a+b)$ 使

$\xi=a\cos\xi+b$．故方程 $x=a\cos x+b$ ( $a>0,b>0$ ) 至少有一个不超过 $a+b$ 的正根 $\xi$.

2、$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)>a$， $f(b)<b$ ，证明：存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f(\xi)=\xi$ 。

证：令 $F(x)=f(x)-x$，则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续．

而 $F(a)=f(a)-a>0$， $F(b)=f(b)-b<0$

由零点定理，$\exists\xi\in(a,b)$，使 $F(\xi)=f(\xi)-\xi=0$

即 $f(\xi)=\xi$．

# 1.10　总习题

1、填空题

(1) 若 $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x+a}{x-a})^x=e^4$，则 $a=$ __2__； $=e^{2a}$ $\Rightarrow a=2$

夹逼准则

(2) 若 $a,b,c,d$ 均为正数，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n+c^n+d^n}=$ __$\max\{a,b,c,d\}$__

小于 $a^n+b^n+c^n+d^n<4(\max\{a,b,c,d\})^n$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\ldots+\frac{n}{n^2+n+n})=$ __$\frac{1}{2}$__； 夹逼准则

(4) 若 $\lim\limits_{x\to\infty}x^k\arctan\frac{2}{x^2}=2$，则 $k=$ __2__；

$=\lim\limits_{x\to\infty}x^k\cdot\frac{2}{x^2}=2\Rightarrow k=2$

(5) 若 $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2+ax+b}{x^2-x-2}=2$，则 $a=$ __2__，$b=$ __$-8$__；

$\lim\limits_{x\to2}(x^2+ax+b)=(4+2a+b)=0$ $\Rightarrow b=-4-2a$

$=\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2+ax-4-2a}{x^2-x-2}=\lim\limits_{x\to2}\frac{(x-2)(x+2+a)}{(x-2)(x+1)}=\lim\limits_{x\to2}\frac{x+2+a}{x+1}=\frac{4+a}{3}=2$ $\Rightarrow\begin{cases}a=2\\b=-8\end{cases}$

(6) 已知 $f(x)=\begin{cases}\frac{\cos x-\cos2x}{x^2} & x\neq0\\ k & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $k=$ __$\frac{3}{2}$__；

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-\cos2x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{-2\sin\frac{3x}{2}\sin(-\frac{x}{2})}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sin\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2\cdot\frac{3}{2}x\cdot\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{3}{2}=f(0)=k$ $\Rightarrow k=\frac{3}{2}$

(7) 对于函数 $f(x)=\frac{x}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}$，$x=1$ 是其 __跳跃__ 间断点，

$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=1$　$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=0$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{-\frac{x}{1-x}}=\lim\limits_{x\to0}(x-1)=-1$

$x=0$ 是其 __可去__ 间断点； $\lim\limits_{x\to0}f(x)=-1$ (但无定义)

(8) 当 $x\to0$ 时，$e^{x^2}-\cos x$ 是关于 $x$ 的 __2__ 阶无穷小。

$\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x^2}-1+1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x^2}-1}{x^2}+\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2}{x^2}+\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}=1$

2、选择题

(1) 设 $f(x)=\left|\frac{\sin(x^3+1)}{x^2+1}\right|\le\frac{1}{x^2+1}$，该函数是 ( D )

(A) 奇函数　(B) 偶函数　(C) 周期函数　(D) 有界函数

(2) 设 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$，则当 $x\to x_0$ 时成立的是 ( D )

(A) $\alpha(x)$ 是较 $\beta(x)$ 高阶的无穷小

(B) $\alpha(x)$ 是较 $\beta(x)$ 低阶的无穷小

(C) $\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}$ 是无穷大量　(D) $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ 是无穷小量

当 $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$ 时 C✗

(3) 下列变量在给定的变化过程中为无穷小量的是 ( D )

(A) $\frac{|x|}{x}-1\ (x\to0)$　(B) $\frac{1}{(x-1)^3}-1\ (x\to1)$

(C) $e^{\frac{1}{x}}\ (x\to0+0)$　(D) $e^{\frac{1}{x}}\ (x\to0-0)$

(4) 当 $x\to0^+$ 时，下列无穷小量阶数最高的是 ( C )

(A) $1-\cos\sqrt{x}\sim\frac{1}{2}x$　(B) $\sqrt{x}+x^4\sim x^{\frac{1}{2}}$

(C) $x\sin\sqrt{x}\sim x^{\frac{3}{2}}$　(D) $x\sqrt{x+\sqrt{x}}\sim x^{\frac{5}{4}}$

(5) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=\lim\limits_{x\to1}(x+1)e^{\frac{1}{x-1}}$ ( B )

$x\to1^+$　$\frac{1}{x-1}\to+\infty$　$\lim\limits_{x\to1^+}(x+1)e^{\frac{1}{x-1}}=+\infty$

$x\to1^-$　$\frac{1}{x-1}\to-\infty$　$\lim\limits_{x\to1^-}(x+1)e^{\frac{1}{x-1}}=0$

(A) $\infty$　(B) 不存在　(C) 2　(D) 0

(6) $\lim\limits_{t\to0}\frac{t}{\sqrt{1-\cos t}}=\lim\limits_{t\to0}\frac{t}{\sqrt{\frac{1}{2}t^2}}=\sqrt{2}\lim\limits_{t\to0}\frac{t}{|t|}$ ( D )

(A) 0　(B) 1　(C) $\sqrt{2}$　(D) 不存在

(7) 设 $f(x)=2^x+3^x-2$，则当 $x\to0$ 时成立的是 ( B )

(A) $f(x)$ 与 $x$ 是等价无穷小

(B) $f(x)$ 与 $x$ 是同阶但不等价无穷小

(C) $f(x)$ 是比 $x$ 高阶的无穷小

(D) $f(x)$ 是比 $x$ 低阶的无穷小

$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2^x+3^x-2}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2^x-1+3^x-1}{x}$　$(a^x-1\sim x\ln a)$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{x\ln2+x\ln3}{x}=\ln2+\ln3$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\cos x^3}{(x^2)^k}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+\cos x^3-1)}{(x^2)^k}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x^3-1}{(x^2)^k}=\lim\limits_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}x^6}{(x^2)^k}=-\frac{1}{2}\Rightarrow k=3$

(8) 当 $x\to0$ 时，$\ln\cos x^3$ 是关于 $x^2$ 的（ B ）阶无穷小

(A) 2　　(B) 3　　(C) 4　　(D) 5

(9)下列命题中正确的是（ B ）

(A) 在其定义区间内连续的函数一定是初等函数

(B) 初等函数在其定义区间内连续

(C) $f(u)$ 处处连续，$x_0$ 是 $\varphi(x)$ 的间断点，则复合函数 $f[\varphi(x)]$ 在 $x_0$ 一定不连续

(D) $f(x)$ 在 $x_0$ 处连续，$g(x)$ 在 $x_0$ 处不连续，则 $f(x)g(x)$ 在 $x_0$ 处一定不连续

3、求下列极限

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^x-n^{-x}}{n^x+n^{-x}}$

$x>0$ 时 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1-n^{-2x}}{1+n^{-2x}}=1$；$x<0$ 时 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^{2x}-1}{n^{2x}+1}=-1$

解：$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^{2x}-1}{n^{2x}+1}=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$

$=\operatorname{sgn}(x)$

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$

$=\lim\limits_{n\to+\infty}(-1)^n\sin(\pi\sqrt{n^2+1}-n\pi)$

$=\lim\limits_{n\to+\infty}(-1)^n\sin\frac{\pi^2}{\pi(\sqrt{n^2+1}+n)}$

$=\lim\limits_{n\to+\infty}(-1)^n\sin\frac{1}{\sqrt{n^2+n}+n}=0$

(3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-\sqrt{1+x}}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1+1-\sqrt{1+x}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}+\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\sqrt{1+x}}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{x}+\lim\limits_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}x}{x}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

(4) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin mx}{\sin nx}$

$=\lim\limits_{x\to\pi}\frac{(-1)^m\sin(mx-m\pi)}{(-1)^n\sin(nx-n\pi)}$

$=(-1)^{m-n}\lim\limits_{x\to\pi}\frac{m(x-\pi)}{n(x-\pi)}=(-1)^{m-n}\cdot\frac{m}{n}$

(5) $\lim\limits_{x\to3}(\frac{1}{x-2})^{\frac{1}{x-3}}$

原式 $=e^{\lim\limits_{x\to3}\frac{1}{x-3}\cdot(\frac{1}{x-2}-1)}=e^{\lim\limits_{x\to3}\frac{1}{x-3}\cdot\frac{3-x}{x-2}}=e^{\lim\limits_{x\to3}\frac{1}{2-x}}$

(6) $\lim\limits_{n\to+\infty}n^2(a^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n+1}})\ (a>0)$

$=\lim\limits_{n\to+\infty}n^2(a^{\frac{1}{n}}-1+1-a^{\frac{1}{n+1}})=\lim\limits_{n\to+\infty}n^2(a^{\frac{1}{n}}-1)+\lim\limits_{n\to+\infty}n^2($

$=\lim\limits_{n\to+\infty}n^2(\frac{1}{n}\ln a-\frac{1}{n+1}\ln a)$

$=\ln a\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2}{n(n+1)}=\ln a$

法二：原式 $=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a^{\frac{1}{n+1}}(a^{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}-1)}{\frac{1}{n^2}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})\ln a}{\frac{1}{n^2}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2}{n(n+1)}\ln a=\ln a$



1 章　极限与

$x^3-1\sim x$

$\lim\limits_{x\to0}(\frac{a_1^x+$

解：$\lim\limits_{x\to0}$

$=\frac{1}{n}($

∴原式

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1}{}$

解：$\lim\limits_{x\to0}$

、设 $f(x$

求 $f(x$

解：

$a^x-1\sim x\ln a\quad (x\to 0)$

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a_1^x+a_2^x+\ldots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}\quad (a_i>0)$

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}-1+1\right)}{x}\sim\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x-n}{xn}$　$\dfrac{a_1^x+\cdots+a_n^x}{n}-1$

$=\frac{1}{n}(\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n)=\ln\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$

$\therefore$ 原式 $=e^{\ln\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}}=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$

(8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x+x^2)+\ln(1-x+x^2)}{\sec x-\cos x}$

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2+x^4)}{\frac{1}{\cos x}(1-\cos^2 x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x^2+x^4)\cos x}{\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cos x}{x^2}=1$

4、设 $f(x)$ 是多项式，且 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)-x^3}{x^2}=2$，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$，求 $f(x)$。

为二次多项式

解：设 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)-x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}\right)=a=2$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2+ax+b+\frac{c}{x}\right)=1\ \Rightarrow b=1,\ c=0$

$\therefore f(x)=x^3+2x^2+x$

5、若 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b)=0$，求 $a,b$ 的值。

$\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-a-\frac{b}{x}\right)=0$

$\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-a-\frac{b}{x}=0\ \Rightarrow 1-a=0\ \Rightarrow a=1$

$b=\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x+1}{\sqrt{x^2-x+1}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}=-\frac{1}{2}$

$\Rightarrow b=-\frac{1}{2}$

法二：$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(1-a^2)x^2-x+1}{\sqrt{x^2-x+1}+ax}-b=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(1-a^2)x-1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+a}-b=0$

$\Rightarrow 1-a^2=0$，但 $1+a\neq 0$，且 $\dfrac{-1}{1+a}-b=0\ \Rightarrow a=1,\ b=-\frac{1}{2}$

6、设 $x_1=1,x_{n+1}=\dfrac{3(x_n+1)}{x_n+3}$（$n$=1, 2,…），证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$ 存在，并求出极限值。

解：1° $\{x_n\}$ 为非负数列，$x_1=1,x_2=\frac{3}{2}$，$x_3=\frac{15}{9}$．假设 $x_n\geq x_{n-1}$，

则 $x_{n+1}-x_n=\dfrac{3(x_n+1)}{x_n+3}-\dfrac{3(x_{n-1}+1)}{x_{n-1}+3}=\dfrac{3\cdot 2(x_n-x_{n-1})}{(x_n+3)(x_{n-1}+3)}\geq 0$

故 $\{x_n\}$ 单调递增．

又 $x_{n+1}=\dfrac{3(x_n+1)}{x_n+3}=\dfrac{3(x_n+3-2)}{x_n+3}=3-\dfrac{6}{x_n+3}<3$

$x_{n+1}=\dfrac{x_n+3+2x_n}{x_n+3}=1+\dfrac{2x_n}{3}>1$

$\therefore\{x_n\}$ 有界．故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在．设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$

则 $A=\dfrac{3(A+1)}{A+3}\ \Rightarrow A=\sqrt{3}$ 或 $A=-\sqrt{3}$（舍）

$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{3}$

7、写出函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1+x}}{\tan x}$ 的全部间断点，并指明间断点的类型。

解：定义域为 $\{x \mid x\geq -1 \text{ 且 } x\neq k\pi,\ x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}\}$

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1+x}}{\tan x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(\sqrt{1+x}-1)-(\sqrt[3]{1+x}-1)}{x}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

故 $x=0$ 为可去间断点

$x=k\pi\ (k\neq0)$ 为无穷间断点　（$\lim\limits_{x\to k\pi \atop k\neq0}f(x)=\infty$）

$x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ 为可去间断点　（$\lim\limits_{x\to k\pi+\frac{\pi}{2}}f(x)=0$）

8、讨论函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x$ 的连续性，如果有间断点，说明其类型。

解：$\lim\limits_{n\to\infty}x^{2n}=\begin{cases}0, & |x|<1\\ 1, & |x|=1\\ +\infty, & |x|>1\end{cases}$

$\therefore f(x)=\begin{cases}x, & |x|<1\\ 0, & |x|=1\\ -x, & |x|>1\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}(-x)=-\lim\limits_{x\to-1^-}x=1$

$\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}x=-1$

$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(-x)=-1$

$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}x=1$

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty,-1),(-1,1),(1,+\infty)$ 内连续. $x=1,-1$ 是 $f(x)$ 的第一类跳跃间断点.

9、$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$a<x_1<x_2<\ldots x_n<b$，证明：$\exists\xi$ 使得 $f(\xi)=\dfrac{1}{n}[f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)]$。

证：当 $f(x_i)\ (i=1,2,\cdots,n)$ 全相等时，取 $\xi=x_1,x_2,\ldots$

当 $f(x_i)$ 不全相等时，记 $m=\min\{f(x_1),\cdots,f(x_n)\}$，
$M=\max\{f(x_1),\cdots,f(x_n)\}$ 则有 $m<\frac{1}{n}(f(x_1)+\cdots$

不妨设 $f(x_i)=m$，$f(x_k)=M$，则在以 $x_i,x_k$ 为端点的闭区间上 $\exists\ \xi\in(x_i,x_k)$ 或 $\in(x_k,x_i)$ 使得

$f(\xi)=\frac{1}{n}[f(x_1)+\cdots+f(x_n)]$

10、设 $f(x)$ 在 $[0,2a]$ 上连续，且有 $f(0)=f(2a)$，证明：$\exists\xi\in[$ 使得 $f(\xi)=f(a+\xi)$。

解：设 $F(x)=f(a+x)-f(x)$，$x\in[0,a]$

则 $F(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续，且有 $F(0)=f(a)-f(0)$

$F(a)=f(2a)-f(a)$　$\therefore F(0)F(a)=(f(a)-f(0))(f(2a)-f(a))$
$=-(f(a)-f(0))^2$

① 当 $f(a)=f(0)=f(2a)$ 时取 $\xi=0,a$ 即可.

② 当 $f(a)\neq f(0)$ 时，则有 $F(0)F(a)<0$. 由零点定理
$\exists\xi\in(0,a)$ 使得 $F(\xi)=0$

# 第 2 章　导数与微分

## 2.1　导数的定义

要求：理解导数概念,了解导数的几何意义及可导与连续的关系。

1、填空题

(1) $f(x)$ 在点 $x_0$ 可导是 $f(x)$ 在点 $x_0$ 连续的 __充分__ 条件，$f(x)$ 在点 $x_0$ 连续是 $f(x)$ 在点 $x_0$ 可导的 __必要__ 条件；

(2) $f(x)$ 在点 $x_0$ 的左导数 $f'_-(x_0)$ 及右导数 $f'_+(x_0)$ 都存在且相等是 $f(x)$ 在点 $x_0$ 可导的 __充要__ 条件；

(3) 设 $f'(x_0)$ 存在，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}=$ __$f'(x_0)$__ ，

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+mh)-f(x_0-nh)}{h}=$ __$(m+n)f'(x_0)$__ ；

(4) $f(x)=x(x-1)(x-2)\cdots(x-10)$，则 $f'(9)=$ __$-9!=-362880$__

(5) $\left(\dfrac{1}{x}\right)'=$ __$-\dfrac{1}{x^2}$__ ，$(\sqrt{x})'=$ __$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$__ ，$\left(\dfrac{1}{\sqrt{x\sqrt{x}}}\right)'=$ __$-\dfrac{3}{4}x^{-\frac{7}{4}}$__ ；

2、求曲线 $y=\ln x$ 在点 $(2,\ln 2)$ 处的切线方程与法线方程。

解: $k=y'|_{x=2}=\dfrac{1}{x}\Big|_{x=2}=\dfrac{1}{2}$

切线方程: $y-\ln 2=\frac{1}{2}(x-2)\Rightarrow y=\frac{1}{2}x+\ln 2-1$

法线方程: $y-\ln 2=-2(x-2)\Rightarrow y=-2x+\ln 2+4$

3、设 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=k$，证明：$f(x)$ 在 $x=0$ 点可导。

证: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=k$ 知 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$ 又 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 故 $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$

$\therefore f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=k$

即 $f(x)$ 在 $x=0$ 点可导.

4、设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\le 1\\ ax+b & x>1\end{cases}$，问 $a,b$ 应取什么值时，函数 $f(x)$ 处处可导。

解: 因 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导知 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续, 则有

$\lim\limits_{x\to 1^+}(ax+b)=a+b=f(1)=1$

$f'_-(1)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}(x+1)=2$

$f'_+(1)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{ax+b-1}{x-1}=a=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{ax-a}{x-1}=a$

因 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，则 $f'_-(1)=f'_+(1)\Rightarrow a=2$ 又 $a+b=1\Rightarrow b=-1$

5、讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\sin^2 x & x\ne 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性、可导性。

解: $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\sin^2 x=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x}=0=f(0)$

$\therefore f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{x}\sin^2 x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x^2}=1$

$\therefore f(x)$ 在 $x=1$ 处可导.

## 2.2 求导法则

**要求：**熟练掌握导数的基本公式与运算法则，熟练掌握复合函数、隐函数、参数方程求导法则。

1、填空题

(1) $(\cos\frac{1}{x})' = \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$；

(2) $(\frac{1-\ln x}{1+\ln x})' = -\frac{2}{x(1+\ln x)^2}$；

(3) $[\ln(\cos e^x)]' = -e^x\tan e^x$；

(4) $(\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}})' = x(a^2-x^2)^{-\frac{3}{2}}$；

(5) $f(x)$ 为可导函数，则 $(\frac{1}{f^2(x)})' = \frac{-2f'(x)}{f^3(x)}$。

2、计算题

(1) 设 $y=\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$，求 $y'$。

$$y' = \frac{1}{x+\sqrt{a^2+x^2}}[1+\frac{1}{2}(a^2+x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x]$$
$$= \frac{1}{x+\sqrt{a^2+x^2}}(1+\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}) = \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

(2) 设 $y=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$，求 $y'$。

$x\neq0$ 时 $y' = 2x\sin\frac{1}{x} + x^2\cos\frac{1}{x}(-\frac{1}{x^2}) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$

$x=0$ 时 $y'(0) = \lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}-0}{x-0} = \lim\limits_{x\to0}x\sin\frac{1}{x} = 0$

$\therefore y' = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}, & x\neq0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

(3) 设 $y=\tan a^x+\arctan x^a$ $(a>0)$，求 $y'$。

$$y' = \sec^2 a^x\cdot a^x\ln a + \frac{a x^{a-1}}{1+(x^a)^2}$$

(4) 设 $y=\ln\sin\frac{x}{2}-3^x\ln\cos\sqrt{x}$，求 $y'$。

$$y' = \frac{1}{2}\cot\frac{x}{2} + \frac{3^x}{2\sqrt{x}}\tan\sqrt{x} - 3^x\ln3\ln\cos\sqrt{x}$$

(5) 设 $y=e^{x^2}f(x^2)$，其中 $f(t)$ 为可导函数，求 $y'$。

$$y' = 2xe^{x^2}[f(x^2)+f'(x^2)]$$
$$(=2xe^{x^2}f(x^2)+2xe^{x^2}f'(x^2))$$

3、设 $f(x)=(x^2-a^2)g(x)$，其中 $g(x)$ 在 $x=a$ 处连续，

$$f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{(x^2-a^2)g(x)-0}{x-a} = \lim_{x\to a}(x+a)g(x)$$
$$= 2ag(a)$$

注：只能用定义.

4、求由下列方程确定的隐函数 $y=y(x)$ 的导数 $\frac{dy}{dx}$。

(1) $e^{xy}+\cos(xy)-y^2=0$

$e^{xy}(y+xy')+(-\sin(xy))(y+xy')-2yy'=0$

$\Rightarrow y'=\frac{ye^{xy}-y\sin(xy)}{2y+x\sin(xy)-xe^{xy}}$

(2) $\arctan\frac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}\left(=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\right)$

$\frac{\frac{xy'-y}{x^2}}{1+(\frac{y}{x})^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x+2yy'}{x^2+y^2}$

$\Rightarrow y'=\frac{x+y}{x-y}$

(3) $y=\sqrt[3]{\frac{(x+1)(2x+1)^2}{x+3}}$

$\ln y=\frac{1}{3}[\ln(x+1)+2\ln(2x+1)-\ln(x+3)]$

$\frac{1}{y}\cdot y'=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{x+1}+\frac{4}{2x+1}-\frac{1}{x+3}\right)$

$\Rightarrow y'=\sqrt[3]{\frac{(x+1)(2x+1)^2}{x+3}}\left[\frac{1}{3(x+1)}+\frac{4}{3(2x+1)}-\frac{1}{3(x+3)}\right]$

(4) $y=(1+x)^{\frac{1}{x}}$

解：$\ln y=\frac{1}{x}\ln(1+x)$　　$(1+x>0)$

$\frac{1}{y}\cdot y'=-\frac{1}{x^2}\ln(1+x)+\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1+x}$

$\Rightarrow y'=(1+x)^{\frac{1}{x}}\left[\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}\right]$

5、求曲线 $\rho=2\sin 2\theta$ 在 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 相应点处法线的直角坐标方程。

解：$\begin{cases} x=\rho\cos\theta=2\sin2\theta\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta=2\sin2\theta\sin\theta \end{cases}$

$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\frac{\pi}{4}}=\left.\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}\right|_{\theta=\frac{\pi}{4}}=\left.\frac{2(2\cos2\theta\sin\theta+\sin2\theta\cos\theta)}{2(2\cos2\theta\cos\theta-\sin2\theta\sin\theta)}\right|_{\theta=\frac{\pi}{4}}=-1$

$x_0=y_0=\sqrt{2}$　$\therefore y-\sqrt{2}=x-\sqrt{2}$　即 $y=x$

6、求下列参数方程所确定函数的导数

(1) $\begin{cases} x=\frac{3at}{1+t^2} \\ y=\frac{3at^2}{1+t^2} \end{cases}$，求 $\frac{dy}{dx}$。

解：$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{6at}{(1+t^2)^2}}{\frac{3a(1-t^2)}{(1+t^2)^2}}=\frac{2t}{1-t^2}$

(2) 已知 $\begin{cases} x=\cos t+t\sin t \\ y=\sin t-t\cos t \end{cases}$，求 $\left.\frac{dx}{dy}\right|_{t=\frac{3}{4}\pi}$。

$\left.\frac{dx}{dy}\right|_{t=\frac{3}{4}\pi}=\left.\frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{dy}{dt}}\right|_{t=\frac{3}{4}\pi}=\left.\frac{-\sin t+\sin t+t\cos t}{\cos t-\cos t+t\sin t}\right|_{t=\frac{3}{4}\pi}$

$=\cot t|_{t=\frac{3}{4}\pi}=-1$

## 2.3 高阶导数及相关变化率

**要求**：了解高阶导数和相关变化率的概念，会求 n 阶导数。

1、填空题（其中 $f''(x)$ 存在）

(1) $(e^{-x}\sin x)'' = $ $-2e^{-x}\cos x$；(2) $(f(x^2))'' = $ $2f'(x^2)+4x^2f''(x^2)$

(3) $(\cos^2 2x)^{(n)} = $ $2^{2n-1}\cos(4x+n\frac{\pi}{2})$。

$\left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right)^{(n)}$

2、计算题

(1) $y=2x^2+x|x|$，求 $\frac{d^2y}{dx^2}$。

解：$y=\begin{cases}3x^2, & x>0\\ 0, & x=0\\ x^2, & x<0\end{cases}$ $\quad y'=\begin{cases}6x & x>0\\ 0 & x=0\\ 2x & x<0\end{cases}$ $(y'_+(0)=y'_-(0)=0)$

$\frac{d^2y}{dx^2}=\begin{cases}6 & x>0\\ \text{不存在} & x=0\\ 2 & x<0\end{cases}$ $\quad (y''_+(0)=6\neq y''_-(0)=2)$

(2) $\sin y+xe^y=0$，求 $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{\substack{x=0\\y=0}}$。

$y'=-\frac{e^y}{\cos y+xe^y}$

$y''=\frac{e^{2y}(\sin y+2\cos y+xe^y)}{(\cos y+xe^y)^3}$ $\quad y''(0)=2$

(3) $y=x-\ln y$，求 $\frac{d^2y}{dx^2}$。

$y'=1-\frac{1}{y}y' \Rightarrow y'=\frac{y}{y+1}$

$y''=\frac{1}{y^2}y'^2-\frac{1}{y}y'' \Rightarrow y''=\frac{y'^2}{y(y+1)}=\frac{y}{(1+y)^3}$

(4) $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$，求 $\frac{d^2y}{dx^2}$。

$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\frac{\sin t}{1-\cos t}$

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\sin t}{1-\cos t}\right)\Big/\frac{d}{dt}[a(t-\sin t)]=\frac{\frac{\cos t-1}{(1-\cos t)^2}}{a(1-\cos t)}=-\frac{1}{a(\cdots}$

(5) $\begin{cases}x=f'(t)\\ y=tf'(t)-f(t)\end{cases}$，其中 $f(t)$ 具有二阶导数且 $f''(t)\neq 0$，

求 $\frac{d^2y}{dx^2}$。

解：$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{f'(t)+tf''(t)-f'(t)}{f''(t)}=t$

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}(t)}{\frac{d}{dt}(f'(t))}=\frac{1}{f''(t)}$

(6) $y=\frac{1}{x^2-3x+2}$，求 $y^{(n)}$。

$y=\frac{1}{(x-1)(x-2)}=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}$

$y^{(n)}=(-1)^n\frac{n!}{(x-2)^{n+1}}-(-1)^n\frac{n!}{(x-1)^{n+1}}$

$=(-1)^n n!\left[\frac{1}{(x-2)^{n+1}}-\frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right]$

3、用莱布尼兹公式计算 $(x^2\sin 2x)^{(50)}$。

$(x^2\sin 2x)^{(50)}=x^2(\sin 2x)^{(50)}+50\cdot 2x\cdot(\sin 2x)^{(49)}+\frac{50\times 49}{2}\cdot 2\cdots$

$=x^2\cdot 2^{50}\sin(2x+50\cdot\frac{\pi}{2})+50\cdot 2x\cdot 2^{49}\sin(2x+49\cdot\frac{\pi}{2})$

$+50\cdot 49\cdot 2^{48}\sin(2x+48\cdot\frac{\pi}{2})$

$=2^{50}(\frac{1225}{2}\sin 2x+50x\cos 2x-x^2\sin 2x)$

## 2.4 微分

要求：理解微分的概念，了解微分的几何意义及一阶微分形式不变性，熟练掌握微分的基本公式与运算法则。

1、填空题

$\Delta y=(x+\Delta x)^3-(x+\Delta x)-(x^3-x)$

(1)已知 $y=x^3-x$，则在 $x=2$ 处当 $\Delta x=0.01$ 时 $\Delta y=$ <u>0.110601</u>；

$dy=$ <u>0.11</u>；　$dy=y'dx=y'\Delta x$

(2) $d$( <u>$-\frac{1}{1+x}+C$</u> ) $=\frac{1}{(1+x)^2}dx$；　$d$( <u>$2\sqrt{x}+C$</u> ) $=\frac{1}{\sqrt{x}}dx$；

(3) $d$( <u>$\frac{1}{3}\sin(3x+1)+C$</u> ) $=\cos(3x+1)dx$。

2、选择题

(1) 已知 $f(x)$ 可导，若 $y=f(\sin x)$，则 $dy=$ ( A )

(A) $f'(\sin x)d\sin x$　　(B) $f'(\sin x)dx$

(C) $[f(\sin x)]'d\sin x$　　(D) 前者均不对

(2) 若 $y=f(x)$，有 $f'(x_0)=\frac{1}{2}$，则当 $\Delta x\to 0$ 时，该函数在 $x=x_0$ 处的微分 $dy$ 是 ( B )

(A) 与 $\Delta x$ 等价的无穷小　(B) 与 $\Delta x$ 同阶的无穷小

(C) 比 $\Delta x$ 低阶的无穷小　(D) 比 $\Delta x$ 高阶的无穷小

3、求下列函数的微分

(1) $y=\sqrt[3]{x}+\sqrt[x]{3}+\sqrt[3]{3}=x^{\frac{1}{3}}+3^{\frac{1}{x}}+3^{\frac{1}{3}}$

$dy=\left(\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}-\frac{\ln 3}{x^2}\sqrt[x]{3}\right)dx$

(2) $y=\ln\cos\sqrt{x}$

$dy=\frac{1}{\cos\sqrt{x}}d(\cos\sqrt{x})=\left(\frac{1}{\cos\sqrt{x}}(-\sin\sqrt{x})\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx$

$=-\frac{\tan\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}dx$

(3) $y=f(1-2x)+\sin(f(x))$ (其中$f(x)$可导)

$dy=f'(1-2x)d(1-2x)+\cos(f(x))d(f(x))$

$=[-2f'(1-2x)+\cos(f(x))f'(x)]dx$

4、已知由方程 $2y-x=(x-y)\ln(x-y)$ 确定的 $y$ 是 $x$ 的函数，求 $dy$。

两边微分 $2dy-dx=(dx-dy)\ln(x-y)+(x-y)\frac{dx-dy}{x-y}$

$\Rightarrow dy=\frac{2+\ln(x-y)}{3+\ln(x-y)}dx$

5、设 $y=\sin(x^2)$，求 $\frac{dy}{dx}$，$\frac{dy}{d(x^2)}$，$\frac{dy}{d(x^3)}$。

$\frac{dy}{dx}=\cos(x^2)\cdot 2x=2x\cos(x^2)$

$\frac{dy}{dx^2}=\frac{\frac{dy}{dx}}{\frac{d(x^2)}{dx}}=\frac{2x\cos(x^2)}{2x}=\cos(x^2)$

$\frac{dy}{dx^3}=\frac{2x\cos(x^2)dx}{3x^2dx}=\frac{2\cos(x^2)}{3x}$

## 2.5 总习题

$=-\frac{1}{2}\lim_{h\to0}\frac{f(3-h)-f(3)}{-h}=-\frac{1}{2}f'(3)=-1$

1、填空题

(1) 已知 $f'(3)=2$，则 $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(3-h)-f(3)}{2h}=$ __$-1$__；

(2) 设 $f'(x_0)$ 存在，$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}=$ __$2\sqrt{x_0}f'(x_0)$__；

$=\lim\limits_{x\to x_0}(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})\cdot\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=$ $f'(x_0)$

(3) 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^n\sin\frac{1}{x} & x\neq0\\ 0 & x=0\end{cases}$（$n$ 为正数），问 $n$ 在什么范围内时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处具有下面的性质：①连续；②可导；③有连续的导数，① __$n>0$__，② __$n>1$__，③ __$n>2$__；

① $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}x^n\sin\frac{1}{x}=f(0)=0$
$\Rightarrow n>0$

② $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}x^{n-1}\sin\frac{1}{x}$ 存在
$\Rightarrow n>1$

③ $f'(x)=\begin{cases}nx^{n-1}\sin\frac{1}{x}-x^{n-2}\cos\frac{1}{x} & x\neq0\\ 0\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to0}f'(x)=\lim\limits_{x\to0}nx^{n-1}\sin\frac{1}{x}-\lim\limits_{x\to0}x^{n-2}\cos\frac{1}{x}$

$n>2$

(4) 若曲线 $y=x^2+ax+b$ 和 $2y=xy^3-1$ 在点 $(1,-1)$ 处相切，其中 $a,b$ 为常数，则 $a=$ __$-1$__，$b=$ __$-1$__。

$y'=2x+a$

$2y'=y^3+3xy^2\cdot y'\Rightarrow y'|_{x=1,y=-1}=1$

$\begin{cases}1+a+b=-1 & (过(1,-1)点)\\ 2+a=1 & (两导数值在(1,-1)处相等)\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}a=-1\\ b=-1\end{cases}$

(5) $d(\frac{\sin x}{x})=$ __$\frac{x\cos x-\sin x}{2x^3}$__ $d(x^2)$。

2、选择题

(1) 若 $f(x)$ 是奇函数，且 $f'(0)$ 存在，则 $x=0$ 是 $F(x)=\frac{f(x)}{x}$ 的（ B ）

2.(1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$ 存在 但在 $x=0$ 处无定义

(A) 无穷间断点　　(B) 可去间断点

(C) 连续点　　(D) 振荡间断点

(2) 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x & x\le0\\ \frac{a+b\cos x}{x} & x>0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导，则( B )

(A) $a=-2,b=2$　　(B) $a=2,b=-2$

(C) $a=-1,b=1$　　(D) $a=1,b=-1$

2.(2) 可导 ⇒ 连续 ⇒ $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{a+b\cos x}{x}=f(0)=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to0^+}(a+b\cos x)=0\Rightarrow a+b=0$ ①

可导 ⇒ $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{x-0}{x-0}=1$　$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{a+b\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{b(\cos x-1)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{b\cdot(-\frac{x^2}{2})}{x^2}=-\frac{b}{2}$

$\Rightarrow -\frac{b}{2}=1$ ② 由①②知 $a=2,b=-2$

(3) 设 $f(x)=3x^3+x^2|x|$，则使 $f^{(n)}(0)$ 存在的最高阶数为( C )

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

(4) 已知函数 $f(x)$ 具有任意阶导数，且 $f'(x)=[f(x)]^2$，则 $n$ 当为大于等于 2 的整数时，$f(x)$ 的 $n$ 阶导数 $f^{(n)}(x)$ 是（ A ）

$f''(x)=2f(x)f'(x)=2f^3(x)$　$f'''(x)=2\cdot3f^2(x)f'(x)=3!f^4(x)$

(A) $n![f(x)]^{n+1}$　　(B) $n[f(x)]^{n+1}$　　(C) $[f(x)]^{2n}$　　(D) $n![f(x)]^{2n}$

3、计算题

(1) 设 $y=\sin mx\cdot\cos^n x$，求 $y'$。

$y'=m\cos mx\cdot\cos^n x-n\cos^{n-1}x\sin mx\cdot\sin x$

(2) 设 $y=\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt3}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt3}$，求 $y'$。

$y=\frac{1}{3}\ln(x+1)-\frac{1}{6}\ln(x^2-x+1)+\frac{1}{\sqrt3}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt3}$

$y'=\frac{1}{3(x+1)}-\frac{2x-1}{6(x^2-x+1)}+\frac{1}{\sqrt3}\cdot\frac{1}{1+(\frac{2x-1}{\sqrt3})^2}\cdot\frac{2}{\sqrt3}=\frac{1}{x^3+1}$

(3) 设 $y=\sin^2(\frac{1-\ln x}{x})$，求 $y'$。

$y'=2\sin(\frac{1-\ln x}{x})\cos(\frac{1-\ln x}{x})(\frac{1-\ln x}{x})'$

$=\frac{\ln x-2}{x^2}\sin\frac{2(1-\ln x)}{x}$

(4) 设 $y=\begin{cases}\ln(1+x) & x>0\\ 0 & x=0\\ \dfrac{1}{x}\sin^2 x & x<0\end{cases}$，求 $y'$。

$x=0$ 时 $y'_{0^+}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln(1+x)-0}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{x}=1$

$y'_{0^-}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\frac{1}{x}\sin^2x-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^-}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2=1$

$\therefore y'|_{x=0}=1$

$\therefore y'=\begin{cases}\frac{1}{1+x}, & x>0\\ 1, & x=0\\ -\frac{1}{x^2}\sin^2x+\frac{\sin 2x}{x}, & x<0\end{cases}$

(5) 设 $y=\sqrt{x\sin x\cdot\sqrt{1-e^x}}$，求 $y'$。

$\ln y=\frac{1}{2}\ln x+\frac{1}{2}\ln\sin x+\frac{1}{4}\ln(1-e^x)$

$\dfrac{y'}{y}=\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{2}\cot x-\dfrac{e^x}{4(1-e^x)}$

$\therefore y'=\sqrt{x\sin x\sqrt{1-e^x}}\left(\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{2}\cot x-\dfrac{e^x}{4(1-e^x)}\right)$

(6) 设 $y=\sqrt[\varphi(x)]{\psi(x)}$，其中 $\varphi(x),\psi(x)$ 为可导函数，求 $y'$。

$\ln y=\dfrac{1}{\varphi(x)}\ln\psi(x)$ $\therefore \dfrac{y'}{y}=-\dfrac{\varphi'(x)}{\varphi^2(x)}\ln\psi(x)+\dfrac{1}{\varphi(x)}\cdot\dfrac{\psi'(x)}{\psi(x)}$

$\therefore y=\sqrt[\varphi(x)]{\psi(x)}\cdot\dfrac{\varphi(x)\psi'(x)-\psi(x)\varphi'(x)\ln\psi(x)}{\varphi^2(x)\psi(x)}$

(7) 设 $y=y(x)$ 由方程 $x^y=y^x$ 所确定，求 $y'$。

$y\ln x=x\ln y$

$\therefore y'\ln x+\dfrac{y}{x}=\ln y+x\cdot\dfrac{y'}{y}$

$\therefore y'=\dfrac{xy\ln y-y^2}{xy\ln x-x^2}$

(8) 设 $y=y(x)$ 由方程 $e^y+xy=e$ 所确定，求 $y''(0)$。

$e^y y'+y+xy'=0$ $\therefore y'=-\dfrac{y}{e^y+x}$

$e^y\cdot y'\cdot y'+e^y\cdot y''+y'+y'+xy''=0$ $\therefore y''=-\dfrac{[e^y\cdot(y')^2+2y']}{e^y+x}$

$x=0,\ y=1$ 时 $y'|_{\substack{x=0\\y=1}}=-\dfrac{1}{e}$ $y''(0)=\dfrac{1}{e^2}$

(9) 设 $\begin{cases}x=2te^t+1\\ y=t^3-3t\end{cases}$，求 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=1}$，$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}$。

$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=1}=\left.\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right|_{t=1}=\left.\dfrac{3t^2-3}{2e^t+2te^t}\right|_{t=1}=\left.\dfrac{3(t-1)}{2e^t}\right|_{t=1}=0$

$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}=\left.\dfrac{\frac{3e^t(2-t)}{2e^{2t}}}{2e^t(1+t)}\right|_{t=1}=\left.\dfrac{3(2-t)}{4e^{2t}(1+t)}\right|_{t=1}=\dfrac{3}{8e^2}$

(10) 设 $\begin{cases}x=\ln(1+t^2)\\ y=t-\arctan t\end{cases}$，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$。

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{1-\frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\dfrac{t}{2}$

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{t}{2}\right)=\dfrac{\frac{d}{dt}\left(\frac{t}{2}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\dfrac{1+t^2}{4t}$

(11) 设 $y=\dfrac{5-x^2}{x^2-1}$，求 $y^{(n)}$。

$y=-1+\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{2}{x+1}$

$y^{(n)}=2\cdot(-1)^n n!\left[\dfrac{1}{(x-1)^{n+1}}-\dfrac{1}{(x+1)^{n+1}}\right]$

(12) 设 $y=\sin^4 x+\cos^4 x$，求 $y^{(n)}$。

$y=(\sin^2x+\cos^2x)^2-2\sin^2x\cos^2x=1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\cos4x}{2}=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos4x$

$y^{(n)}=4^{n-1}\cos(4x+n\cdot\frac{\pi}{2})$

(13) 设 $y=a+\ln(xy)+e^{x+y}$，求 $dy$。

$dy=\frac{1}{xy}(ydx+xdy)+e^{x+y}(dx+dy)$

$dy=\frac{y+xye^{x+y}}{xy-x-xye^{x+y}}dx$

4、试从 $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{y'}$ 导出 $\frac{d^2x}{dy^2}=-\frac{y''}{(y')^3}$。

$\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{d}{dy}(\frac{dx}{dy})=\frac{d}{dy}(\frac{1}{y'})=\frac{d}{dx}(\frac{1}{y'})\cdot\frac{dx}{dy}$

$=-\frac{y''}{(y')^2}\cdot\frac{1}{y'}=-\frac{y''}{(y')^3}$

5、求证 $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}$ 上任一点处的切线在两坐标轴上的截距之和为常数 $a$。对等式两边求导得 $\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{y'}{2\sqrt{y}}=0 \Rightarrow y'=-\sqrt{\frac{y}{x}}$

在$(x_0,y_0)$处的切线方程：$y-y_0=-\frac{\sqrt{y_0}}{\sqrt{x_0}}(x-x_0)$

在$x$轴上的截距：$\sqrt{x_0y_0}+x_0$

在$y$轴上的截距：$\sqrt{x_0y_0}+y_0$

∴ 截距之和为 $x_0+\sqrt{x_0y_0}+y_0+\sqrt{x_0y_0}=(\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0})^2=a$

6、设函数 $f(x)$ 在 $x\le1$ 时具有二阶导数，求 $a,b,c$ 使
$$F(x)=\begin{cases} f(x) & x\le1 \\ a(x-1)^2+b(x-1)+c & x>1 \end{cases}$$
在 $x=1$ 处具有二阶导数。

∵ $F(x)$ 在 $x=1$ 连续 ∴ $\lim\limits_{x\to1^+}F(x)=c=f(1)$

∵ $F(x)$ 在 $x=1$ 可导 ∴ $F'_-(1)=f'_-(1)=F'_+(1)=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{a(x-1)^2+b(x-1)+c-c}{x-1}=b$

∴ $b=F'_-(1)=f'_-(1)$

$F'(x)=\begin{cases} f'(x) & x<1 \\ f'_-(1) & x=1 \\ 2a(x-1)+b & x>1 \end{cases}$ $\quad F''_-(1)=f''_-(1)$ $\quad F''_+(1)=2a$ $\quad$ ∴ $a=\frac{f''_-(1)}{2}$

7、设曲线 $y=f(x)$ 与 $y=\sin x$ 在原点相切，求 $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{2}}\sqrt{f(\frac{2}{n})}$。

∵ $(0,0)$ 在 $y=f(x)$ 上 ∴ $f(0)=0$

$y'|_{x=0}=f'(0)=(\sin x)'|_{x=0}=1$

$\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{1}{2}}\sqrt{f(\frac{2}{n})}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{f(\frac{2}{n})}{\frac{1}{n}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{f(\frac{2}{n})-f(0)}{\frac{1}{2}(\frac{2}{n}-0)}}=\sqrt{2f'(0)}=\sqrt{2}$

8、溶液自深 18cm，顶部直径为 12cm 的正圆锥形漏斗中漏入一直径为 10cm 的圆柱形筒中，开始时漏斗中盛满了溶液，已知当溶液在漏斗中深为 12cm 时，其表面下降的速率为 1cm/min，问此时圆柱形筒溶液表面上升的速率为多少？

设$t$时刻漏斗水深为$y(t)$ cm，圆柱水深为$h(t)$ cm.

$\frac{1}{3}\pi\cdot6^2\cdot18-\frac{1}{3}\pi r^2y=\pi\cdot5^2\cdot h$，$r=\frac{y}{3}$

∴ $216-\frac{1}{27}y^3=25h$

两边对$t$求导：$-\frac{1}{9}y^2\cdot\frac{dy}{dt}=25\frac{dh}{dt}$

当$y=12$，$\frac{dy}{dt}=-1$时，

$\frac{dh}{dt}=\frac{16}{25}=0.64$ (cm/min)

# 第3章 微分中值定理与导数的应用

## 3.1 微分中值定理

要求：理解并会用罗尔、拉格朗日定理，了解并会用柯西定理。

1、填空题

(1) $f(x)=\ln\sin x$ 在区间 $[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}]$ 上是否满足罗尔定理的条件 是；有无定理中的数值 $\xi$？ $\xi=\frac{\pi}{2}$（有则写出其值）。

(2) 已知 $f(x)=x(x-1)(x-2)(x+1)(x+2)$，那么 $f'(x)=0$ 有 4 个根，根所在的区间分别为 $(-2,-1),(-1,0),(0,1),(1,2)$

2、选择题

(1) 罗尔定理的三个条件：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 $(a,b)$ 内可导，$f(a)=f(b)$ 是 $f(x)$ 在 $(a,b)$ 内至少存在一点 $\xi$，使 $f'(\xi)=0$ 的

(A) 必要条件　(B) 充分条件　( B )

(C) 充分必要条件　(D) 既非充分也非必要条件

(2) 函数 $f(x)=x^{\frac{2}{3}}\cos x$ 在 $[-1,1]$ 上不满足罗尔定理是因为( B )

(A) 在 $[-1,1]$ 上不连续　(B) 在 $(-1,1)$ 内有不可导点 $x=0$ 处

(C) $f(1)\neq f(-1)$　(D) 以上三条都不对

3、设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续，在 $(0,a)$ 内可导，且 $f(a)=0$，证明：存在一点 $\xi\in(0,a)$，使 $f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$。

证：设 $F(x)=xf(x)$ 在 $[0,a]$ 上应用罗尔定理

$(F(0)=0=F(a)=af(a)=a\cdot 0)$

$\exists\xi\in(0,a)$ 使 $F'(\xi)=0$ 即 $f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$

4、若方程 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x=0$ 有一正根 $x=x_0$，证明：方程 $a_0nx^{n-1}+a_1(n-1)x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}=0$ 必有一个小于 $x_0$ 的正根。

证：设 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x$ 在 $[0,x_0]$ 上应用罗尔定理

$(f(0)=f(x_0)=0)$

$\exists\xi\in(0,x_0)$ 使 $f'(\xi)=0$　$\xi$ 即为所求正根.

5、设 $a>b>0,n>1$，证明：$nb^{n-1}(a-b)<a^n-b^n<na^{n-1}(a-b)$。

设 $f(x)=x^n$ 在 $[b,a]$ 上应用拉格朗日中值定理

$\exists\xi\in(b,a)$ 使 $f(a)-f(b)=a^n-b^n=f'(\xi)(a-b)=n\xi^{n-1}(a-b)$

$\because 0<b^{n-1}<\xi^{n-1}<a^{n-1}$

$\therefore nb^{n-1}(a-b)<a^n-b^n<na^{n-1}(a-b)$

6、设 $0<a<b$，函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 $(a,b)$ 内可导，试利用柯西中值定理证明：存在一点 $\xi\in(a,b)$，使

$f(b)-f(a)=\xi f'(\xi)\ln\frac{b}{a}$。

设 $f(x)=f(x)$，$g(x)=\ln x$

$f(x)\cdot g(x)$ 在 $[a,b]$ 上应用柯西中值定理 $(g'(x)=\frac{1}{x}\neq 0)$

$\exists\xi\in(a,b)$ 使 $\frac{f(b)-f(a)}{\ln b-\ln a}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f'(\xi)}{\frac{1}{\xi}}=\xi f'(\xi)$

即 $f(b)-f(a)=\xi f'(\xi)\ln\frac{b}{a}$

## 3.2 洛必达法则

要求：熟练掌握用洛必达法则。

1、填空题 $\lim_{x\to2}(x^3+ax^2+b)=8+4a+b=0$ ① $\Rightarrow\begin{cases}a=-1\\b=-4\end{cases}$

$=\lim_{x\to2}\frac{3x^2+2ax}{1}=8\Rightarrow12+4a=8$ ②

(1) $\lim_{x\to2}\frac{x^3+ax^2+b}{x-2}=8$，则 $a=$ <u>$-1$</u>，$b=$ <u>$-4$</u>；

(2) $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=$ <u>$1$</u>。

$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}=1$（出现循环，不能用洛必达法则）

2、求下列极限

(1) $\lim_{x\to0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}$

$\overset{(L)}{=}\lim_{x\to0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}=\frac{1}{2}$

(2) $\lim_{x\to0}(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\tan x})$ （$\infty-\infty$型，先通分）

$=\lim_{x\to0}\frac{\tan x-x}{x^2\tan x}=\lim_{x\to0}\frac{\tan x-x}{x^2\cdot x}$

$\overset{(L)}{=}\lim_{x\to0}\frac{\sec^2x-1}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\tan^2x}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{3x^2}=\frac{1}{3}$

(3) $\lim_{x\to0}(\frac{1}{x^2})^{\tan x}$ （$\infty^0$）

$=e^{\lim_{x\to0}\frac{-2\ln x}{\cot x}}\overset{(L)}{=}e^{\lim_{x\to0}\frac{-\frac{2}{x}}{-\csc^2x}}=e^{\lim_{x\to0}2\frac{\sin x}{x}\cdot\sin x}$

$=e^0=1$

法二：原式 $=e^{\lim_{x\to0}x(-2\ln x)}=e^{\lim_{x\to0}\frac{2\ln x}{\frac{1}{x}}}$

$\overset{(L)}{=}e^{\lim_{x\to0}\frac{-2\frac{1}{x}}{(-\frac{1}{x^2})}}=e^0=1$

(4) $\lim_{x\to0^+}(\frac{\sin x}{x})^{\frac{1}{x}}$ （$1^\infty$型）

$=e^{\lim_{x\to0^+}\frac{\ln\sin x-\ln x}{x}}\overset{(L)}{=}e^{\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}}{1}}$

$=e^{\lim_{x\to0^+}\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}}\overset{(L)}{=}e^{\lim_{x\to0^+}\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{2x}}$

$=e^0=1$

法二：原式 $=e^{\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}\ln[1+(\frac{\sin x}{x}-1)]}$

$=e^{\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}(\frac{\sin x}{x}-1)}=e^{\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x-x}{x^2}}$

$\overset{(L)}{=}e^{\lim_{x\to0^+}\frac{\cos x-1}{2x}}=e^{\lim_{x\to0^+}\frac{-\frac{x^2}{2}}{2x}}=e^0=1$

(5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\sin x}{(\pi-2x)^2}$

$\overset{(\frac{0}{0})}{=}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{2(\pi-2x)\cdot(-2)}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{4(2x-\pi)}$

$\overset{(\frac{0}{0})}{=}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\sin x}{8}=-\frac{1}{8}$

3、设函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处具有二阶导数 $f''(x_0)$，

证明：$\lim\limits_{h\to0}\frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2}=f''(x_0)$。

证：左 $\overset{(\frac{0}{0})}{=}\lim\limits_{h\to0}\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0-h)}{2h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\frac{1}{2}\left[\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{h}+\frac{f'(x_0-h)-f'(x_0)}{-h}\right]$

必须用定义，不能用洛必达法则

$=\frac{1}{2}[f''(x_0)+f''(x_0)]=f''(x_0)=$ 右边

## 3.3 泰勒公式

**要求**：理解泰勒定理，知道$[e^x,\sin x,\cos x,\ln(1+x),(1+x)^\alpha]$的麦克劳林展开式。

1、求函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 按 $(x+1)$ 展开的带拉格朗日余项的 n 阶泰勒公式。

$f^{(k)}(x)=\left(\frac{1}{x}\right)^{(k)}=\frac{(-1)^k\cdot k!}{x^{k+1}}\quad k=0,1,2,\cdots$

$f^{(k)}(-1)=\frac{(-1)^k\cdot k!}{(-1)^{k+1}}=-k!$

$f(x)=-1-(x+1)-\cdots-(x+1)^n+\frac{(-1)^{n+1}}{\xi^{n+2}}(x+1)^{n+1}$，$\xi$介于-1与x

2、求函数 $f(x)=xe^{-x}$ 的带佩亚诺余项的 $n$ 阶麦克劳林公式。

$f(x)=x\left[1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}x^{n-1}}{(n-1)!}+o(x^{n-1})\right]$

$=x-x^2+\frac{x^3}{2!}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}x^n}{(n-1)!}+o(x^n)$

3、计算 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\{1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^5)\}-[1-\frac{x^2}{2}+\frac{(-\frac{x^2}{2})^2}{2!}+o(x^4)]}{x^4}$

$=-\frac{1}{12}$

## 3.4 函数的单调性和极值

**要求**：掌握函数单调性的判断方法，理解函数的极值概念，掌握求函数极值和最值的方法。

1、设 $y=x^2e^{-x}$，则其单减区间 $\underline{(-\infty,0)\cup(2,+\infty)}$。

2、选择题 $y'=xe^{-x}(2-x)$

(1) 下列命题正确的是 ( C )

(A) 凡是驻点就是极值点 (B) 凡是极值点就是驻点

(C) 可导函数的极值点必是它的驻点

(D) 函数的极值点一定是最值点

$f'(x)=3x^2+2>0$ $f(x)\uparrow$ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$

(2) 函数 $f(x)=x^3+2x+q$ 的零点的个数为 ( A )

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 个数与 $q$ 有关

3、确定下列函数的单调区间

(1) $y=2x^3-6x^2-18x-7$ 增 $(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$, 减 $(-1,3)$

$y'=6x^2-12x-18=6(x+1)(x-3)=0$

| $x$ | $(-\infty,-1)$ | $-1$ | $(-1,3)$ | $3$ | $(3,+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | − | 0 | + |
| $f(x)$ | ↗ | | ↘ | | ↗ |

(2) $y=x^x\ (x>0)$ 增 $(\frac{1}{e},+\infty)$, 减 $(0,\frac{1}{e})$

$y=e^{x\ln x}$ $y'=x^x(\ln x+1)$

令 $y'=0$ 得 $x=\frac{1}{e}$

| $x$ | $(0,\frac{1}{e})$ | $\frac{1}{e}$ | $(\frac{1}{e},+\infty)$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | − | 0 | + |
| $f(x)$ | ↘ | | ↗ |

4、求函数 $y=(x-4)\cdot\sqrt[3]{(x+1)^2}$ 的极值。

$y'=\frac{5}{3}(x-1)/\sqrt[3]{x+1}$ 令 $y'=0$ 得 $x=1$. 不可导点 $x=-1$

$y_{max}(-1)=0$, $y_{min}(1)=-3\sqrt[3]{4}$

| $x$ | $(-\infty,-1)$ | $-1$ | $(-1,1)$ | $1$ | $(1,+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 不存在 | − | 0 | + |
| $f(x)$ | ↗ | 极大 | ↘ | 极小 | ↗ |

5、设 $y=y(x)$ 由方程 $x^3-ax^2y^2+by^3=0$ 确定，且 $y(1)=1$，是驻点，求 $a,b$ 的值。

$3x^2-2ay^2x-2ax^2yy'+3by^2y'=0$

把 $x=1, y=1, y'=0$ 代入得 $3-2a=0$ $\therefore a=\frac{3}{2}$

又 $x=1, y=1$ 满足方程，代入得

$1-a+b=0$ $\therefore b=\frac{1}{2}$

6、当 $x>0$ 时，证明：$\ln(1+x)>\dfrac{\arctan x}{1+x}$。

证：令 $f(x)=(1+x)\ln(1+x)-\arctan x$

$f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，在 $(0,+\infty)$ 上可导

$f'(x)=\ln(1+x)+(1+x)\cdot\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1+x^2}=\ln(1+x)+\frac{x^2}{1+x^2}>0$

$\therefore f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单增

$f(0)=0$. 当 $x>0$ 时有 $f(x)>f(0)=0$

即得证

7、讨论方程 $\ln x = ax \quad (a>0)$ 的实根个数。

令 $f(x)=\ln x - ax$ 驻点 $x=\frac{1}{a}$

$f'(x)>0$ $x<\frac{1}{a}$，$f'(x)<0$，$x>\frac{1}{a}$

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=-\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty=\lim\limits_{x\to+\infty} x(\frac{\ln x}{x}-a)$

$f(\frac{1}{a})=-1-\ln a$ 为极大值.

① 当 $0<a<\frac{1}{e}$，$f(\frac{1}{a})>0$ 有两根

② 当 $a>\frac{1}{e}$，$f(\frac{1}{a})<0$ 无实根.

③ 当 $a=\frac{1}{e}$，$f(\frac{1}{a})=0$ 有一实根.

8、求函数 $f(x)=x^3+x^2-8x-5$ 在 $[-4,1]$ 上的最大值、最小值。

$f_{max}(-2)=7$，$f_{min}(-4)=-21$

解: $f'(x)=3x^2+2x-8=(x+2)(3x-4)$

令 $f'(x)=0$ 得 $x=-2$，$x=\frac{4}{3}$

所以 $f(-2)=7$，$f(\frac{4}{3})=-\frac{311}{27}$

$f(-4)=-21$，$f(1)=-11$

$\therefore f_{max}(-2)=7$，$f_{min}(-4)=-21$.

9、问函数 $f(x)=x^2-\frac{54}{x}\,(x<0)$ 在何处取得最小值？$x=-3$

$f'(x)=2x+\frac{54}{x^2}=\frac{2(x^3+27)}{x^2}=\frac{2(x+3)(x^2-3x+9)}{x^2}$

令 $f'(x)=0$ 得 $x=-3$ 唯一驻点

$x<-3$ 时 $f'(x)<0$；$x>3$ 时，$f'(x)>0$

$\therefore x=-3$ 时 $f(x)$ 取极小值，即为最小值.

10、要造一圆柱形油罐，体积为 $V$，求底半径 $r$ 和高 $h$ 各为多少时，才能使表面积最小？

$V=\pi r^2 h$，$h=\frac{V}{\pi r^2}$

$S(r)=2\pi r^2+2\pi rh=2\pi r^2+\frac{2V}{r}$，$r\in(0,+\infty)$

$S'(r)=4\pi r-\frac{2V}{r^2}$ 令 $S'(r)=0$ 得唯一驻点

$r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$

$\therefore S_{min}(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}})=3\sqrt[3]{2\pi V^2}$

## 3.5 函数图形的描绘

**要求：**掌握曲线凹凸性的判断方法，会求曲线的拐点与渐近线；

1、 曲线 $y=4-\sqrt[3]{x-1}$ 的拐点是 $(1,4)$ 。

2、选择题

(1) 若 $f(-x)=f(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$，在 $(-\infty,0)$ 内，$f'(x)>0$，$f''(x)<0$，则在 $(0,+\infty)$ 内 ( C )

(A) $f(x)$ 单调增加且图象凸 (B) $f(x)$ 单调增加且图象凹

(C) $f(x)$ 单调减少且图象凸 (D) $f(x)$ 单调减少且图象凹

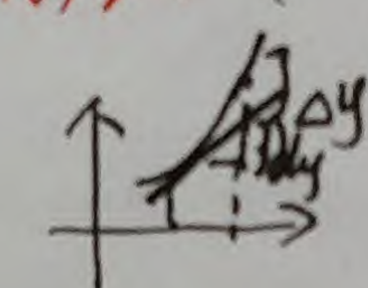
(2) 设 $f(x)$ 二阶可导，且 $f'(x)>0$，$f''(x)>0$，则当 $\Delta x>0$ 时，有 ( A )

$(0<\theta<1)$

$0<\Delta y=f'(x+\theta\Delta x)\Delta x<f'(x)\Delta x=dy$ $f'(x)\nearrow$

(A) $\Delta y>dy>0$ (B) $\Delta y<dy<0$

(C) $dy>\Delta y>0$ (D) $dy<\Delta y<0$



$dy=f'(x)\Delta x>0$

3、求 $y=e^{-\frac{x^2}{2}}$ 的拐点及凹凸区间

拐点 $(\pm1, e^{-\frac{1}{2}})$

凹：$(-\infty,-1)$，$(1,+\infty)$

凸：$[-1,1]$

D: $(-\infty,+\infty)$，$y'=-xe^{-\frac{x^2}{2}}$ $y''=e^{-\frac{x^2}{2}}(x^2-1)$

令 $y''=0$ 得 $x_1=-1$，$x_2=1$

| $x$ | $(-\infty,-1)$ | $-1$ | $(-1,1)$ | $1$ | $(1,+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y''$ | + | 0 | − | 0 | + |
| 图形 | ∪ | 拐点 | ∩ | 拐点 | ∪ |

4、问 $a,b$ 为何值时，点 $(1,3)$ 为曲线 $y=ax^3+bx^2$ 的拐点。

解：点 $(1,3)$ 在曲线上得 $a+b=3$

又 $(1,3)$ 为拐点，则 $y''|_{x=1}=(6ax+2b)|_{x=1}=6a+2b=0$

$\therefore a=-\frac{3}{2}$，$b=\frac{9}{2}$

5、求函数 $y=x\ln(e+\frac{1}{x})$ 的渐近线方程。

$\lim\limits_{x\to-\frac{1}{e}} x\ln(e+\frac{1}{x})=-\infty$

$\therefore x=-\frac{1}{e}$ 为铅直渐近线

$y=x+\frac{1}{e}$ 为斜渐近线

6、描绘函数 $y=e^{-(x-1)^2}$ 的图形

D: $(-\infty,+\infty)$

$y'=-2(x-1)e^{-(x-1)^2}$ 令 $y'=0$ 得 $x=1$

$y''=2e^{-(x-1)^2}(2x^2-4x+1)=2e^{-(x-1)^2}\cdot2(x-\frac{2-\sqrt2}{2})(x-\frac{2+\sqrt2}{2})$

令 $y''=0$ 得 $x=\frac{2\pm\sqrt2}{2}$

又 $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-(x-1)^2}=0$ $\therefore$ 有水平渐近线 $y=0$.

| $x$ | $(-\infty,\frac{2-\sqrt2}{2})$ | $\frac{2-\sqrt2}{2}$ | $(\frac{2-\sqrt2}{2},1)$ | $1$ | $(1,\frac{2+\sqrt2}{2})$ | $\frac{2+\sqrt2}{2}$ | $(\frac{2+\sqrt2}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | + | | + | 0 | − | | |
| $y''$ | + | 0 | − | | − | 0 | |
| $y$ | ↗ | 拐点 | ↗ | 极大 | ↘ | 拐点 | |

# 3.6 总习题

1.(1) $\lim_{x\to0}(1+a\cos x-b\sin x)=1+a=0$ $\lim_{x\to0}-a\sin x-b\cos x=-b=0$

1、填空题

(1) 若 $\lim_{x\to0}\frac{1+a\cos x-b\sin x}{x^2}=\frac{1}{2}$，则 $a=$ __-1__，$b=$ __0__；

(2) $\lim_{x\to0}\frac{-a\sin x-b\cos x}{2x}$

(2) 设 $y=(ax)^3-(ax)^2-ax-a$ 在 $x=1$ 处取极小值，则 $a=$ __1__；

可能极值点 $x=-\frac{1}{3a}$，$x=\frac{1}{a}$ ∴ $a=-\frac{1}{3}$，$a=1$ 验证 $y''$ 知 $a=-\frac{1}{3}$ 极大，$a=1$ 极小.

2、选择题

(1) 若 $f(x)$ 在 $x=a$ 处为二阶可导函数，则

$$\lim_{h\to0}\frac{\frac{f(a+h)-f(a)}{h}-f'(a)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)-f'(a)h}{h^2}=\lim_{h\to0}\frac{f'(a+h)-f'(a)}{2h}=\frac{1}{2}f''(a)$$ （ A ）

(A) $\frac{f''(a)}{2}$ (B) $f''(a)$ (C) $2f''(a)$ (D) $-f''(a)$

(2) 函数 $y=6x+\frac{3}{x}-x^3$ 在 $x=1$ 处有 （ C ）

$y'=6-\frac{3}{x^2}-3x^2=-\frac{3}{x^2}(x^2-1)^2$ $y''=\frac{6}{x^3}-6x=\frac{6}{x^3}(1+x^2)(1-x^2)$

$x<1$，$y''>0$ $x>1$，$y''<0$ 变号

(A) 极小值 (B) 极大值

(C) 拐点 (D) 既无拐点又无极值

(3) 已知 $f(x)$ 在 $U(0,\delta)$ 内有定义，$f(0)=0$，$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{1-\cos x}=a$，$(a>0)$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 点 （ D ）

保号性知 ∃ $\mathring{U}$ s.t. $\frac{f(x)}{1-\cos x}>0$ 又 $1-\cos x>0$ ⇒ $f(x)>0=f(0)$

(A) 不可导 (B) 可导且 $f'(0)\neq0$ (C) 取极大值 (D) 取极小值

(4) 已知方程 $x^2y^2+y=1$ $(y>0)$ 确定 $y$ 是 $x$ 的函数，则（ B ）

(A) $y(x)$ 有极小值，但无极大值

(B) $y(x)$ 有极大值，但无极小值

(C) $y(x)$ 既有极大值又有极小值

(D) $y(x)$ 无极值

$y'=-\frac{2xy^2}{2x^2y+1}$

令 $y'=0$ 得驻点 $(0,1)$

$x<0$，$y'>0$；$x>0$，$y'<0$

(5) 设在 $[0,1]$ 上，$f''(x)>0$ 则 $f'(0)$，$f'(1)$，$f(1)-f(0)$ 或 $f(0)-f(1)$ 的大小顺序是 （ B ）

(A) $f'(1)>f'(0)>f(1)-f(0)$

(B) $f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$

(C) $f(1)-f(0)>f'(1)>f'(0)$

(D) $f'(1)>f(0)-f(1)>f'(0)$

(5) $f''(x)>0$ ⇒ $f'(x)$ ↑

$f(1)-f(0)=f'(\xi)$，$0<\xi<1$

$f'(0)<f'(\xi)<f'(1)$ 即 B

(6) 设 $f(x)$ 在 $U(0,\delta)$ 内具有连续的二阶导数，$f'(0)=0$，$\lim_{x\to0}\frac{f''(x)}{\sqrt[3]{x}}=a$ $(a<0)$，则 （ C ）

(A) $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的极小值点

(B) $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的极大值点

(C) $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(D) $(0,f(0))$ 不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(6) $\lim_{x\to0}f''(x)=0=f''(0)$ 连续

由极限保号性，在 $U(0,\delta)$ 内

$\frac{f''(x)}{\sqrt[3]{x}}<0$ $(a<0)$

$x<0$ $f''(x)>0$，$f'(x)$ ↑

$f'(x)<f'(0)=0$

∴ $f(x)$ ↓

$x>0$，$f''(x)<0$，$f'(x)$ ↓

$f'(x)<f'(0)=0$ ∴ $f(x)$ ↓

∴ $x=0$ 不是极值点

(7) 曲线 $y=\frac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}$ （ D ）

(7) $\lim_{x\to0}e^{-x^2}=1$，$\lim_{x\to\infty}e^{-x^2}=0$

$\lim_{x\to0}y=\infty$ ⇒ $y=0$

$\lim_{x\to\infty}y=1$，⇒ $x=1$

(A) 没有渐近线 (B) 仅有水平渐近线

(C) 仅有铅直渐近线 (D) 既有水平渐近线又有铅直渐近线

3、求下列函数的极限

(1) $\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$ （$\frac{0}{0}$型）

$$=\lim_{x\to0}\frac{e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}-e}{x}\overset{(L)}{=}\lim_{x\to0}\frac{e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}\cdot\frac{\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)}{x^2}}{1}$$

$$=e^{\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\ln(1+x)}\cdot\lim_{x\to0}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}=e\cdot\lim_{x\to0}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2}$$

$$\overset{(L)}{=}e\cdot\lim_{x\to0}\frac{1-\ln(1+x)-(1+x)\frac{1}{1+x}}{2x}=e\cdot\lim_{x\to0}\frac{-\ln(1+x)}{2x}$$

$$=e\cdot\lim_{x\to0}\frac{-x}{2x}=-\frac{e}{2}$$

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{2}{\pi}\arctan x)^x$ （$1^\infty$型）

$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\frac{2}{\pi}\arctan x}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\frac{2}{\pi}+\ln\arctan x}{x^{-1}}}$

$\overset{洛}{=}e^{\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{1}{\arctan x}\cdot\frac{1}{1+x^2})/(-\frac{1}{x^2})}=e^{-\frac{2}{\pi}}$

法二：原式 $=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}x(\frac{2}{\pi}\arctan x-1)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{\pi}\arctan x-1}{x^{-1}}}$

$\overset{洛}{=}e^{\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{1+x^2})/(-\frac{1}{x^2})}=e^{-\frac{2}{\pi}}$

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+\frac{1}{2}x^2-\sqrt{1+x^2}}{(\cos x-e^{x^2})\sin x^2}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+\frac{1}{2}x^2-[1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\frac{x^4}{2!}+o(x^4)]}{[(1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{x^4}{4!}+o(x^5))-(1+x^2+\frac{x^4}{2!}+o(x^4))]x^2}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{8}x^4+o(x^4)}{(-\frac{3}{2}x^2+o(x^4))x^2}=-\frac{1}{12}$

(4) 设函数 $f(x)$ 二阶可导，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=1$，$f''(0)=2$，

求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-x}{x^2}$。

由 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=1$ （$\frac{0}{0}$型） 得 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0=f(0)$ （由连续性）

$f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=1$

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{0+1\cdot x+\frac{1}{2!}\cdot2\cdot x^2+o(x^2)-x}{x^2}=1$

4、确定 $a,b$ 使 $f(x)=x-(a+b\cos x)\sin x$ 当 $x\to0$ 时为 $x$ 的
无穷小量。

$f(x)=x-a\sin x-\frac{b}{2}\sin2x$

$=x-a(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^5))-\frac{b}{2}(2x-\frac{8x^3}{3!}+\frac{32x^5}{5!}+o(x^5))$

$=(1-a-b)x+(\frac{a}{6}+\frac{2}{3}b)x^3-(\frac{a}{120}+\frac{16}{120}b)x^5+o(x^5)$

$\therefore\begin{cases}1-a-b=0\\ \frac{a}{6}+\frac{2}{3}b=0\end{cases}\quad\therefore\begin{cases}a=\frac{4}{3}\\ b=-\frac{1}{3}\end{cases}$

5、设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 上可导，且 $f(0)=f(1$

$f(\frac{1}{2})=1$，证明：必有一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=1$ 成立。

令 $F(x)=f(x)-x$，则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续

由于 $F(\frac{1}{2})=f(\frac{1}{2})-\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}>0$，$F(1)=f(1)-1=0-1<0$

由零点定理，$\exists\eta\in(\frac{1}{2},1)$ 使 $F(\eta)=0$

又 $F(0)=f(0)-0=0$，$F(x)$ 在 $[0,\eta]$ 上连续，在 $(0,\eta)$ 内可导

由罗尔定理知 $\exists\xi\in(0,\eta)\subset(0,1)$ 使 $F'(\xi)=0$

即 $f'(\xi)-1=0$ $\therefore f'(\xi)=1$

6、设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 $(a,b)$ 内可导，证明：在 $(a,b)$ 内有一点 $\xi$，使 $\begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{vmatrix} = (b-a)\begin{vmatrix} f(a) & f'(\xi) \\ g(a) & g'(\xi) \end{vmatrix}$。

证：令 $\varphi(x)=f(a)g(x)-g(a)f(x)=\begin{vmatrix} f(a) & f(x) \\ g(a) & g(x) \end{vmatrix}$

则 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 $(a,b)$ 内可导，由拉格朗日中值定理知

$\exists\xi\in(a,b)$，使 $\varphi(b)-\varphi(a)=\varphi'(\xi)(b-a)$，即

$\begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{vmatrix} = (b-a)\begin{vmatrix} f(a) & f'(\xi) \\ g(a) & g'(\xi) \end{vmatrix}$

7、函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 $(a,b)$ 内可导（$0\le a<b$），试证：在区间 $(a,b)$ 内存 $\xi,\eta$，在使得 $f'(\xi)=\frac{a+b}{2\eta}f'(\eta)$。

证：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 $(a,b)$ 内可导

由拉格朗日中值定理知 $\exists\xi\in(a,b)$ 使 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$

又 $f(x)$，$F(x)=x^2$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 $(a,b)$ 内可导，且在 $(a,b)$ 内 $F'(x)=2x\neq0$ $\therefore$ 由柯西中值定理知 $\exists\eta\in(a,b)$

使 $\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\frac{f'(\eta)}{2\eta}$ $\therefore$ $\frac{f'(\xi)(b-a)}{b^2-a^2}=\frac{f'(\eta)}{2\eta}$ 即 $f'(\xi)=\frac{a+b}{2\eta}f'(\eta)$

8、设在 $[0,1]$ 上 $|f''(x)|\le M$，且 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内取得最大值，证明：$|f'(0)|+|f'(1)|\le M$。

$\because f(x)$ 在 $[0,1]$ 内取得最大值 $\therefore$ 不妨设 $f'(x_0)=0$（无不可导点）

$f'(x)$ 在 $[0,x_0]$、$[x_0,1]$ 上满足拉格朗日中值定理条件

$\therefore\exists\xi_1\in(0,x_0)$，$\xi_2\in(x_0,1)$ 使

$\underbrace{f'(x_0)}_{=0}-f'(0)=-f'(0)=f''(\xi_1)(x_0-0)$

$f'(1)-\underbrace{f'(x_0)}_{=0}=f'(1)=f''(\xi_2)(1-x_0)$

$\therefore|f'(0)|+|f'(1)|=|f''(\xi_1)|x_0+|f''(\xi_2)|(1-x_0)\le Mx_0+M(1-x_0)=M$

9、求 $f(x)=\ln x-\frac{x}{e}+k\ (k>0)$ 在 $(0,+\infty)$ 内零点个数。

令 $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{e}=0$ 得驻点 $x=e$　定：$(0,+\infty)$，当 $0<x<e$ 时 $f'(x)>0$

当 $x>e$ 时 $f'(x)<0$　$\therefore x=e$ 为 $f(x)$ 的极大值点　又 $f(e)=k>0$

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=-\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$

$\therefore f(x)$ 在 $(0,e)$ 与 $(e,+\infty)$ 内严格单调且连续．则在 $(0,e)$，$(e,+\infty)$ 内分别有唯一实根．

10、(1) 证明：$\tan x+2\sin x>3x\quad(0<x<\frac{\pi}{2})$。

令 $f(x)=\tan x+2\sin x-3x$　则 $f'(x)=\sec^2x+2\cos x-3$

$f''(x)=2\sec^2x\tan x-2\sin x=2\sin x(\frac{1}{\cos^3x}-1)>0$

$\because f'(x)$，$f(x)$ 在 $0\le x<\frac{\pi}{2}$ 上连续，$f''(x)>0$　$\therefore f'(x)\uparrow$

对 $\forall0<x<\frac{\pi}{2}$ 时有 $f'(x)>f'(0)=0$　$\therefore f(x)\uparrow$

对 $\forall0<x<\frac{\pi}{2}$ 有 $f(x)>f(0)=0$

(2) 设 $f(x),g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，恒正、可导，且满足不等式 $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)<0$，则当 $x<b$ 时，证明：$f(x)g(b)>f(b)g(x)$。

令 $F(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$　则 $F'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}<0$　$\therefore F(x)\downarrow$

又 $x<b$　$\therefore$　$F(b)<F(x)$

即 $\frac{f(b)}{g(b)}<\frac{f(x)}{g(x)}$

即 $f(x)g(b)>f(b)g(x)$

(3) 证明：当 $-\infty < x < +\infty$ 时，$1 + x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) \ge \sqrt{1+x^2}$。

证：令 $f(x) = 1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}$ 则 $f'(x) = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$

当 $x \ge 0$ 时 $f'(x) \ge 0$ $\therefore f(x)\uparrow$ 于是 $f(x) \ge f(0) = 0$

当 $x<0$ 时 $f'(x)<0$ $\therefore f(x)\downarrow$ 于是 $f(x) > f(0) = 0$

综上对 $\forall -\infty<x<+\infty$ 均有 $f(x)\ge 0$ 即有

$1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) \ge \sqrt{1+x^2}$

11、设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的邻域内二次可导，且有 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x + xf(x)}{x^3} = 1$，求 $f(0)$，$f'(0)$，$f''(0)$。

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x+xf(x)}{x^3} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\frac{x^3}{3!}+o(x^5)+x[f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2)]}{x^3}$

$= \lim\limits_{x\to0}\dfrac{[1+f(0)]x+f'(0)x^2+[\frac{f''(0)}{2}-\frac{1}{3!}]x^3+o(x^3)}{x^3} = 1$

$\therefore 1+f(0)=0,\ f'(0)=0,\ \dfrac{f''(0)}{2}-\dfrac{1}{3!}=1$

故 $f(0)=-1,\ f'(0)=0,\ f''(0)=\dfrac{7}{3}$

12、求 $f(x)=\begin{cases} x^{2x}, x>0 \\ x+2, x\le 0\end{cases}$ 的极值

$\lim\limits_{x\to0^+}x^{2x} = \lim\limits_{x\to0^+}e^{2x\ln x} = \lim\limits_{x\to0^+}e^{2\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}} \overset{(L)}{=} e^{\lim\limits_{x\to0^+}2\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}} = 1$

$\lim\limits_{x\to0^-}(x+2) = 2$　$\lim\limits_{x\to0^+}f(x) \ne \lim\limits_{x\to0^-}f(x)$ $\therefore f(x)$ 在 $x=0$ 不连续且不可导

$f'(x)=\begin{cases} x^{2x}(2\ln x+2), & x>0 \\ 1, & x<0\end{cases}$ 不存在的点

令 $f'(x)=0$ 得 $x=\frac{1}{e}$，$x=0$ 为 $f'(x)$ 不存在的点

| $x$ | $(-\infty,0)$ | $0$ | $(0,\frac{1}{e})$ | $\frac{1}{e}$ | $(\frac{1}{e},+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | 不可导 | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | 极大 | $\searrow$ | 极小 | $\nearrow$ |

$f_{max}(0)=2$，$f_{min}(\frac{1}{e})=e^{-\frac{2}{e}}$

13、求数列 $\{\sqrt[n]{n}\}$ 的最大值项。

令 $f(x)=x^{\frac{1}{x}}\ (x>0)$　$f'(x)=x^{\frac{1}{x}}(\frac{1}{x^2}-\frac{\ln x}{x^2})=x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x)$

令 $f'(x)=0$ 得 $x=e$. 当 $0<x<e$ 时 $f'(x)>0$；当 $x>e$ 时 $f'(x)<0$

$\therefore f(1)<f(2)$，$f(3)>f(4)>\cdots$

即 $1<\sqrt{2}$，$\sqrt[3]{3}>\sqrt[4]{4}>\cdots$　而 $\sqrt{2}=\sqrt[6]{8}$，$\sqrt[3]{3}=\sqrt[6]{9}$

$\therefore \sqrt{2}<\sqrt[3]{3}$　$\therefore \{\sqrt[n]{n}\}$ 中的最大值项为 $\sqrt[3]{3}$.

14、一弓箭手在原点射出的箭的轨迹方程为 $y=kx-\dfrac{k^3+2}{300}x^2$，其中 $x$ 是箭离原点的水平距离，$y$ 是相应的高度($x$ 轴为水平线，距离单位为 m)，正数 $k$ 是轨迹曲线在原点处的切线斜率，问(1) $k$ 为何值时，箭的水平射程最大？(2) $k$ 为何值时，箭射中 30m 远处一直立墙面的高度最大？

(1) $k=1$，(2) $k=\frac{\sqrt{30}}{3}$

解：(1) $kx-\dfrac{k^3+2}{300}x^2=0 \Rightarrow x=0$(舍)，$x=\dfrac{300k}{k^3+2}$ 则 $x'_k=\dfrac{300(2-2k^3)}{(k^3+2)^2}$

令 $x'_k=0$ 得 $k=1$

(2) 当 $x=30$ 时 $y=30k-3(k^3+2)$　令 $y'_k=30-9k^2=0$

$\therefore k=\dfrac{\sqrt{30}}{3}$.

15、求 $y=x+\dfrac{2x}{x^2-1}$ 的凹凸区间及拐点，渐近线方程。

$y'=1+\dfrac{-2(x^2+1)}{(x^2-1)^2}$，$x\ne\pm1$；$y''=\dfrac{4x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$　令 $y''=0$ 得 $x=0$

| $x$ | $(-\infty,-1)$ | $-1$ | $(-1,0)$ | $0$ | $(0,1)$ | $1$ | $(1,+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | $-$ | 不存在 | $+$ | | $-$ | | $+$ |
| $f(x)$ | $\frown$ | 间断 | $\smile$ | 拐点 | $\frown$ | 间断 | $\smile$ |

凹 $(-1,0)$，$(1,+\infty)$　凸 $(-\infty,-1)$，$(0,1)$　拐点 $(0,0)$

$\because \lim\limits_{x\to\pm1}(x+\frac{2x}{x^2-1})=\infty$　$\therefore x=\pm1$ 为铅直渐近线

$\because \lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x^2-1})=1$，$b=\lim\limits_{x\to\infty}(y-kx)=0$

$\therefore y=x$ 为斜渐近线.

求：理

已知

试问

是

设 $F(x)$

$F(x)$

$F$

$\therefore F$

计算

$\int(\sqrt{x}$

$=\int(x$

$=\frac{2}{5}$

# 第4章　不定积分

## 4.1　不定积分的概念与性质

**要求**：理解原函数、不定积分的概念与性质，熟记基本积分公式。

1、已知 $f(x)=\frac{1}{2}\sin^2 x$，$g(x)=-\frac{1}{4}\cos 2x$，$h(x)=-\frac{1}{2}\cos^2 x$，试问 $f(x)$，$g(x)$，$h(x)$ 是同一函数的原函数吗？

是．因 $f'(x)=g'(x)=h'(x)=\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$

2、设 $F(x)$是 $f(x)=-\frac{1}{1+x^2}$ 的一个原函数，且$F(0)=\frac{\pi}{2}$，求 $F(x)$。

$F(x)=\int f(x)dx=\int -\frac{1}{1+x^2}dx=-\arctan x+C$

$F(0)=C=\frac{\pi}{2}$

$\therefore F(x)=-\arctan x+\frac{\pi}{2}=\operatorname{arccot} x$

3、计算下列不定积分

(1) $\int(\sqrt{x}+1)(x-\frac{1}{\sqrt{x}})dx$

$=\int(x^{\frac{3}{2}}+x-1-\frac{1}{\sqrt{x}})dx$

$=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{2}x^2-x-2\sqrt{x}+C$

(2) $\int e^x(1-\frac{e^{-x}}{\sqrt{1-x^2}})dx$

$=\int(e^x-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}})dx=e^x-\arcsin x+C$

(3) $\int(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2})^2dx$

$=\int(1-\sin x)dx=x+\cos x+C$

(4) $\int\frac{1}{1+\cos 2x}dx$

$=\int\frac{1}{1+2\cos^2 x-1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\cos^2 x}dx=\frac{1}{2}\int\sec^2 x dx=\frac{1}{2}\tan x+C$

4、一曲线通过点$(e^2,3)$，且在任一点处的切线的斜率等于该点横坐标的倒数，求该曲线的方程。

解：设曲线方程为 $y=f(x)$，据题意有 $y'=\frac{1}{x}$

$\therefore y=\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$

又曲线过 $(e^2,3)$ $\therefore 3=\ln e^2+C$ $\therefore C=1$

$\therefore$曲线方程为 $y=\ln|x|+1$

# 4.2　换元积分法

**要求**：熟练掌握不定积分的两类换元法。

## 4.2.1　第一类换元法

1、填空题

(1) $\int \frac{1}{x(1+2\ln x)}dx =$ $\frac{1}{2}\ln|1+2\ln x|+C$；

(2) $\int \frac{1}{(2x-3)^2}dx =$ $\frac{1}{6-4x}+C$；

(3) $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx =$ $2\sin\sqrt{x}+C$；

(4) $\int \frac{\sin x}{4+\cos x}dx =$ $-\ln(4+\cos x)+C$；

(5) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}dx =$ $\frac{1}{3}\arcsin x^3+C$；

(6) $\int \frac{1}{9+4x^2}dx =$ $\frac{1}{6}\arctan\frac{2}{3}x+C$；

(7) $\int \frac{e^x}{2+e^x}dx =$ $\ln(2+e^x)+C$；

(8) $\int \frac{(\arctan x)^3}{1+x^2}dx =$ $\frac{1}{4}(\arctan x)^4+C$；

(9) $\int x\sqrt{1-x^2}\,dx =$ $-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+C$；

(10)已知 $\int f(x)dx = F(x)+C$，则 $\int e^{-x}f(e^{-x})dx =$ $-F(e^{-x})+C$

2、计算下列不定积分

(1) $\int \frac{1-x}{\sqrt{4-9x^2}}dx$

$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{3}{2}x)^2}}\cdot\frac{2}{3}d(\frac{3}{2}x) + \int \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{(4-9x^2)^{\frac{1}{2}}}d(4-9x^2)$

$= \frac{1}{3}\arcsin\frac{3}{2}x + \frac{1}{9}\sqrt{4-9x^2}+C$

(2) $\int \frac{x^3}{4+x^2}dx$

$= \int \frac{\frac{1}{2}x^2 d(x^2)}{4+x^2} \overset{x^2=t}{=} \frac{1}{2}\int \frac{t}{4+t}dt = \frac{1}{2}\int\frac{t+4-4}{t+4}dt$

$= \frac{1}{2}\int dt - 2\int \frac{1}{t+4}dt = \frac{1}{2}t - 2\ln|t+4|+C$

$= \frac{1}{2}x^2 - 2\ln(x^2+4)+C$

(3) $\int \frac{1}{\sin x\cos x}dx$

$= \int \frac{d(2x)}{\sin 2x} = \ln|\csc 2x - \cot 2x|+C$

法二：$= \int \frac{\sin^2x+\cos^2x}{\sin x\cos x}dx = \int \tan x\,dx + \int \cot x\,dx$

$= -\ln|\cos x| + \ln|\sin x| + C = \ln|\tan x|+C$

(4) $\int \frac{1+\ln x}{(x\ln x)^2}dx$

$= \int \frac{d(x\ln x)}{(x\ln x)^2} = -\frac{1}{x\ln x}+C$

## 4.2.2　第二类换元法

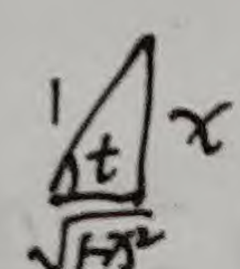
计算下列不定积分

1、$\int \frac{1}{1+\sqrt{2x}}dx$

$\overset{t=\sqrt{2x}}{=} \int \frac{1}{1+t}d(\frac{t^2}{2}) = \int \frac{t}{1+t}dt = \int \frac{t+1-1}{t+1}dt$

$= t-\ln|1+t|+C = \sqrt{2x}-\ln(\sqrt{2x}+1)+C$

2、$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$

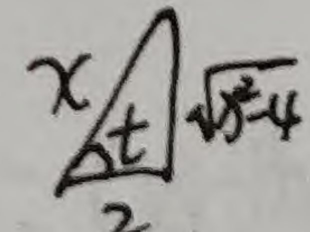



令$x=\sin t$，$t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

原式$=\int \frac{\sin^2 t}{\cos t}d(\sin t) = \int \sin^2 t\,dt$

$=\frac{1}{2}t-\frac{1}{4}\sin 2t+C = \frac{1}{2}\arcsin x-\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+C$

3、$\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}dx$




当$x>2$时令$x=2\sec t$，$t\in(0,\frac{\pi}{2})$

$I=\int \frac{2\tan t}{2\sec t}\cdot 2\sec t\tan t\,dt = 2\int \tan^2 t\,dt = 2\int(\sec^2 t-1)dt$

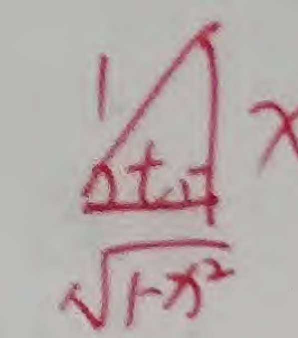
$=2\tan t-2t+C = \sqrt{x^2-4}-2\arccos\frac{2}{x}+C$

当$x<-2$时令$x=-t$ $(>2)$

$I=\int \frac{\sqrt{t^2-4}}{-t}(-dt) = \sqrt{t^2-4}-2\arccos\frac{2}{t}+C = \sqrt{x^2-4}-2\arccos\frac{2}{-x}+C$ 综

$\therefore I=\sqrt{x^2-4}-2\arccos\frac{2}{|x|}+C$

4、$\int \frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}dx$　注：$\tan\frac{t}{2}=\frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\cos^2\frac{t}{2}}=\frac{\sin t}{\cos t+1}$



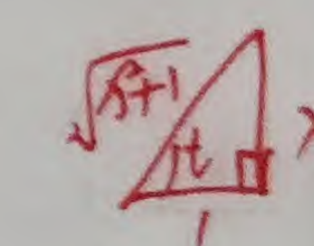

令$x=\sin t$，$t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$则

$I=\int \frac{\cos t}{1+\cos t}dt = \int(1-\frac{1}{2\cos^2\frac{t}{2}})dt = t-\tan\frac{t}{2}+C$

$=t-\cancel{\sqrt{\frac{1-\cos t}{1+\cos t}}}+C = \arcsin x-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}+1}+C$

$\frac{\sin t}{\cos t+1}$

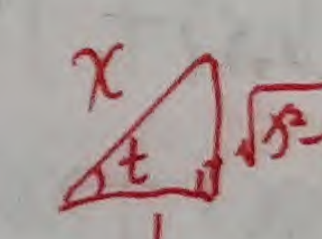
5、$\int \frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}dx$




令$x=\tan t$，$t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

$I=\int \frac{1}{\sec^3 t}\sec^2 t\,dt = \int \cos t\,dt = \sin t+C = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+C$

6、$\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx$




$x>1$时令$x=\sec t$，$t\in(0,\frac{\pi}{2})$

$I=\int \frac{\sec t\tan t}{\sec^2 t\tan t}dt = \int \cos t\,dt = \sin t+C = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+C$

$x<-1$时令$x=-t$，则$I=\int \frac{-dt}{t^2\sqrt{t^2-1}} = -\frac{\sqrt{t^2-1}}{t}+C = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+C$

法二：令$x=\frac{1}{t}$则

$I=-\int \frac{1}{(\frac{1}{t})^2\frac{\sqrt{1-t^2}}{|t|}}(-\frac{1}{t^2})dt = \int \frac{|t|}{\sqrt{1-t^2}}dt = \mathrm{sgn}\,t\cdot(-\frac{1}{2})\int \frac{d(1-t^2)}{(1-t^2)^{\frac{1}{2}}}$

$=\mathrm{sgn}\,t\cdot\sqrt{1-t^2}+C = \mathrm{sgn}\,x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+C = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+C$

## 4.3 分部积分法

**要求**：熟练掌握不定积分的分部积分法。

1、计算下列不定积分

(1) $\int x\sin\frac{x}{2}dx$

$= -\int 2x\, d(\cos\frac{x}{2}) = -2x\cos\frac{x}{2} + 4\sin\frac{x}{2} + C$

(2) $\int \frac{\ln x}{x^2}dx$

$= \int \ln x\, d(-\frac{1}{x}) = -\frac{1}{x}\ln x - \frac{1}{x} + C$

(3) $\int \cos(\ln x)dx$

$= x\cos(\ln x) + \int x\sin(\ln x)\cdot\frac{1}{x}dx$

$= x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x) - \int x\cos(\ln x)\cdot\frac{1}{x}dx$

$\therefore I = \frac{x}{2}[\cos(\ln x) + \sin(\ln x)] + C$

(4) $\int e^{\sqrt{x}}dx$

$\underline{\text{t=}\sqrt{x}}\ \int e^t d(t^2) = 2\int te^t dt = 2\int t\, d(e^t)$

$= 2te^t - 2\int e^t dt = 2te^t - 2e^t + C$

$= 2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - 2e^{\sqrt{x}} + C$

(5) $\int \arcsin x dx$

$= x\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$= x\arcsin x + \frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}d(1-x^2)$

$= x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$

(6) $\int x\tan^2 x dx$

$= \int x(\sec^2 x - 1)dx = \int x\, d(\tan x) - \int x dx$

$= x\tan x - \int \tan x dx - \frac{1}{2}x^2$

$= x\tan x + \ln|\cos x| - \frac{1}{2}x^2 + C$

(7) $\int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x}dx$

$= -\int \ln(\sin x)\, d(\cot x) = -\ln(\sin x)\cdot\cot x + \int \cot^2 x dx$

$= -\ln(\sin x)\cdot\cot x + \int(\csc^2 x - 1)dx$

$= -\ln(\sin x)\cot x - \cot x - x + C$

2、已知 $e^x$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，求 $\int xf'(x)dx$。

$\int x f'(x)dx = \int x\, df(x) = xf(x) - \int f(x)dx$

$= xe^x - e^x + C$

## 4.4　有理函数和可化为有理函数的积分

姓名　　　　班级　　　　学号

**要求:** 会计算有理函数、三角函数有理式及简单无理函数的积分。

计算下列不定积分

1、$\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-x}dx$

$=\int [x^2+x+1+\frac{x^2+x-8}{x(x+1)(x-1)}]dx$

$=\int (x^2+x+1)dx+\int (\frac{8}{x}-\frac{3}{x-1}-\frac{4}{x+1})dx$

$=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+8\ln|x|-3\ln|x-1|-4\ln|x+1|+C$

2、$\int \frac{x-1}{(x+1)(x^2+1)}dx$

$=\int (\frac{x}{x^2+1}-\frac{1}{x+1})dx$

$=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-\ln|x+1|+C$

3、$\int \frac{1}{x(6+x^8)}dx$

$=\frac{1}{6}\int \frac{6+x^8-x^8}{x(6+x^8)}dx=\frac{1}{6}\int \frac{1}{x}dx-\frac{1}{6}\int \frac{x^7}{6+x^8}dx$

$=\frac{1}{6}\ln|x|-\frac{1}{48}\ln(6+x^8)+C$

4、$\int \frac{1}{(2+\cos x)\sin x}dx$

$\underline{\underline{u=\tan\frac{x}{2}}}\int \frac{1}{(2+\frac{1-u^2}{1+u^2})\cdot\frac{2u}{1+u^2}}\cdot\frac{2}{1+u^2}du=\int \frac{u^2+1}{u(u^2+3)}du$

$=\frac{1}{3}\int (\frac{1}{u}+\frac{2u}{u^2+3})du=\frac{1}{3}\ln|u|+\frac{1}{3}\ln(u^2+3)+C$

$=\frac{1}{3}\ln|\tan\frac{x}{2}|+\frac{1}{3}\ln(\tan^2\frac{x}{2}+3)+C$

5、$\int \frac{1}{3+\sin^2 x}dx$

$\underline{\underline{t=\tan x}}\int \frac{1}{3+(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}})^2}\cdot\frac{1}{1+t^2}dt=\int \frac{1}{4t^2+3}dt$

$=\frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{2t}{\sqrt{3}}+C=\frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan(\frac{2\tan x}{\sqrt{3}})+C$

6、$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}dx$

$\underline{\underline{t=\sqrt[6]{x}}}\ 6\int \frac{1}{t^2+t}dt=6\int (\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1})dt$

$=6\ln|t|-6\ln|t+1|+C=\ln\frac{x}{(\sqrt[6]{x}+1)^6}+C$

$=6\ln\frac{\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[6]{x}}+C$

# 4.5 总习题

1、填空题

(1) 若 $f(x)$ 的原函数为 $\sin x$，则 $\int f'(x)dx=$ $(\sin x)'+C=\cos x+C$

$f(\ln x)=\ln x+e^{\ln x}+C$

(2) 设 $f'(\ln x)=1+x$，则 $f(x)=$ $x+e^{x}+C$；

(3) $\frac{d}{dx}[\int f(3x)dx]=$ $f(3x)$ $\quad F'(x)=[\int f(x)dx]'=f(x)$

2、选择题

(1) 已知 $\int f(x)dx=F(x)+C$，则 $\int xf(1-x^2)dx=$ （ C ）

(A) $F(1-x^2)+C$ (B) $\frac{1}{2}F(1-x^2)+C$

(C) $-\frac{1}{2}F(1-x^2)+C$ (D) $-F(1-x^2)+C$

(2) 设 $e^x$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int xf'(x)dx$ （ B ）

（A） $e^x(1-x)+C$ （B） $e^x(x-1)+C$

（C） $e^x(1+x)+C$ （D） $-e^x(1+x)+C$

(3) 已知 $\int xf(x)dx=\arcsin x+C$，则 $\int\frac{1}{f(x)}dx$ （ D ）

$xf(x)=(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$f(x)=\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$

(A) $\frac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3}+C$ (B) $\sqrt{(1-x^2)^3}+C$

(C) $-\sqrt{(1-x^2)^3}+C$ (D) $-\frac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3}+C$

3、计算下列不定积分

(1) $\int e^{3x^2+\ln x}dx$

$=\int e^{3x^2}\cdot x\,dx=\frac{1}{6}e^{3x^2}+C$

(2) $\int\frac{\cos 2x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx$

$=\int\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx=\int(\csc^2 x-\sec^2 x)dx$

$=-\cot x-\tan x+C$

(3) $\int\frac{\ln\tan x}{\sin 2x}dx$

$=\int\frac{\ln\tan x}{2\tan x\cdot\cos^2 x}dx=\frac{1}{2}\int\frac{\ln\tan x}{\tan x}d(\tan x)$

$=\frac{1}{2}\int\ln\tan x\,d(\ln\tan x)=\frac{1}{4}(\ln\tan x)^2+C$

(4) $\int\frac{x+5}{x^2-6x+13}dx$

$=\int\frac{\frac{1}{2}d(x^2-6x+13)}{x^2-6x+13}+\int\frac{8}{(x-3)^2+4}dx$

$=\frac{1}{2}\ln|x^2-6x+13|+4\arctan\frac{x-3}{2}+C$

(5) $\int\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}dx$

$\underline{t=\sqrt[4]{x}}$ $\int\frac{1}{t^2+t}\cdot 4t^3dt=4\int(t-1+\frac{1}{t+1})dt$

$=2t^2-4t+4\ln|t+1|+C$

$=2\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}+4\ln(\sqrt[4]{x}+1)+C$

(6) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx$　法二：原式 $= \int \frac{x\,dx}{x^2\sqrt{x^2-1}} \xlongequal{t=\sqrt{x^2-1}} \int \frac{t\,dt}{(t^2+1)\,t} = \int \frac{dt}{t^2+1}$
$= \arctan t + C = \arctan\sqrt{x^2-1} + C$

$x>1$ 时令 $x=\sec t$，$t\in(0,\frac{\pi}{2})$

$I = \int \frac{1}{\sec t\tan t}\sec t\tan t\,dt = \int dt = t + C = \arccos\frac{1}{x} + C$

$x<-1$ 时令 $x=-t$，$I = \int \frac{1}{t\sqrt{t^2-1}}dt = \arccos\frac{1}{t} + C = \arccos\frac{1}{-x} + C$

$\therefore$ 原式 $= \arccos\frac{1}{|x|} + C$

(7) $\int \frac{x+3}{\sqrt{4x^2+4x+3}}dx$

$= \int \frac{\frac{1}{8}d(4x^2+4x+3)}{\sqrt{4x^2+4x+3}} + \frac{5}{2}\int \frac{1}{\sqrt{(2x+1)^2+2}}dx$

$= \frac{1}{4}\sqrt{4x^2+4x+3} + \frac{5}{4}\ln(2x+1+\sqrt{4x^2+4x+3}) + C$

(8) $\int \frac{1}{2^x(1+4^x)}dx$

令 $t=2^x$，$x=\frac{\ln t}{\ln 2}$，$4^x=t^2$

$I = \int \frac{1}{t(1+t^2)}\cdot\frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{1}{t}dt = \frac{1}{\ln 2}\int(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{1+t^2})dt$

$= \frac{1}{\ln 2}(-\frac{1}{t} - \arctan t) + C = \frac{1}{\ln 2}(-\frac{1}{2^x} - \arctan 2^x) + C$

(9) $\int \frac{\cot x}{\ln(\sin x)}dx$

$= \int \frac{1}{\ln(\sin x)}\cdot\frac{\cos x}{\sin x}dx = \int \frac{1}{\ln(\sin x)}\,\frac{d(\sin x)}{\sin x}$

$= \int \frac{1}{\ln(\sin x)}d(\ln(\sin x)) = \ln|\ln\sin x| + C$

(10) $\int e^x\sin^2 x\,dx = \int e^x\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{2}\int e^x dx - \frac{1}{2}\int e^x\cos 2x\,dx$

又 $\int e^x\cos 2x\,dx = \int \cos 2x\,d(e^x) = e^x\cos 2x + 2\int e^x\sin 2x\,dx$

$= e^x\cos 2x + 2e^x\sin 2x - 4\int e^x\cos 2x\,dx$

$\therefore \int e^x\cos 2x\,dx = \frac{1}{5}(e^x\cos 2x + 2e^x\sin 2x) + C$

$\therefore I = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{10}e^x(\cos 2x + 2\sin 2x) + C$

(11) $\int \frac{x\cos x}{\sin^3 x}dx$

$= \int x\frac{d(\sin x)}{\sin^3 x} = -\frac{1}{2}\int x\,d(\frac{1}{\sin^2 x}) = -\frac{1}{2}\frac{x}{\sin^2 x} + \frac{1}{2}\int \csc^2 x\,dx$

$= -\frac{x}{2\sin^2 x} - \frac{1}{2}\cot x + C$

(12) $\int \frac{1}{\sin 2x + 2\sin x}dx = \int \frac{1}{2\sin x(\cos x+1)}dx$

$\xlongequal{u=\tan\frac{x}{2}} \int \frac{1}{2\cdot\frac{2u}{1+u^2}(\frac{1-u^2}{1+u^2}+1)}\cdot\frac{2}{1+u^2}du = \frac{1}{4}\int \frac{1+u^2}{u}du$

$= \frac{1}{4}\ln|u| + \frac{1}{8}u^2 + C = \frac{1}{4}\ln|\tan\frac{x}{2}| + \frac{1}{8}\tan^2\frac{x}{2} + C$

(13) $\int \frac{x^{11}}{(x^8+1)^2}dx$

$= \int \frac{x^4\cdot\frac{1}{8}d(x^8+1)}{(x^8+1)^2} = -\frac{1}{8}\int x^4\,d(\frac{1}{x^8+1})$

$= -\frac{x^4}{8(x^8+1)} + \frac{1}{8}\int \frac{d(x^4)}{(x^4)^2+1} = -\frac{x^4}{8(x^8+1)} + \frac{1}{8}\arctan(x^4) +$

(14) $\int \frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}dx$

$\int \frac{\frac{1-\ln x}{x^2}}{(1-\frac{\ln x}{x})^2}dx = \int \frac{d(\frac{\ln x}{x}-1)}{(\frac{\ln x}{x}-1)^2}$

$= -\frac{1}{\frac{\ln x}{x}-1}+C = \frac{x}{x-\ln x}+C$

(15) $\int\frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}dx$

$=\frac12\int\frac{2\sin x\cos x+1-1}{\sin x+\cos x}dx = \frac12\int\frac{(\sin x+\cos x)^2-1}{\sin x+\cos x}dx$

$=\frac12\int(\sin x+\cos x)dx - \frac12\int\frac{1}{\sqrt2\sin(x+\frac\pi4)}dx$

$=\frac12(\sin x-\cos x) - \frac{1}{2\sqrt2}\ln|\csc(x+\frac\pi4)-\cot(x+\frac\pi4)|+C$

(16) $\int\frac{1}{\sin^3x\cos^3x}dx$

$=\int\frac{\sin^2x+\cos^2x}{\sin^3x\cos^3x}dx = \int\frac{1}{\sin x\cos^3x}dx+\int\frac{1}{\sin^3x\cos x}dx = \int\frac{\sin^2x+\cos^2x}{\sin x\cos^3x}dx+\int\frac{\sin^2x+\cos^2x}{\sin^3x\cos x}dx$

$=\int\frac{\sin x}{\cos^3x}dx+2\int\frac{1}{\sin x\cos x}dx+\int\frac{\cos x}{\sin^3x}dx$

$=\int\frac{1}{\cos^3x}d(-\cos x)+2\int\frac{1}{\tan x}\sec^2x\,dx+\int\frac{1}{\sin^3x}d(\sin x)$

$=\frac12(\frac{1}{\cos^2x}-\frac{1}{\sin^2x})+2\ln|\tan x|+C$

(17) $\int\frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)}dx$

$=\int\frac{1}{x^2}\arctan x\,dx-\int\frac{1}{1+x^2}\arctan x\,dx$

$=\int\arctan x\,d(-\frac1x)-\int\arctan x\,d(\arctan x)$

$=-\frac1x\arctan x+\int(\frac1x-\frac{x}{1+x^2})dx-\frac12(\arctan x)^2$

$=-\frac1x\arctan x-\frac12(\arctan x)^2+\ln|x|-\frac12\ln(1+x^2)+C$

4、已知 $f(\ln x)=\frac{\ln(1+x)}{x}$，求 $\int f(x)dx$。

令 $\ln x=t$，$x=e^t$，$f(t)=\frac{\ln(1+e^t)}{e^t}$

$\int f(x)dx=\int\frac{\ln(1+e^x)}{e^x}dx=-\int\ln(1+e^x)d(e^{-x})$

$=-e^{-x}\ln(1+e^x)+\int\frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}dx$

$=-\frac{\ln(1+e^x)}{e^x}+x-\ln(1+e^x)+C$

5、已知 $f(x)=\begin{cases}x+1 & x\le1\\ 2x & x>1\end{cases}$，求 $\int f(x)dx$

$\int f(x)dx=\begin{cases}\frac12x^2+x+C_1, & x\le1\\ x^2+C_2, & x>1\end{cases}$

∵被积函数连续 故原函数可导 ∴原函数连续

$\lim_{x\to1^-}(\frac12x^2+x+C_1)=\lim_{x\to1^+}(x^2+C_2)$ ∴ $C_1+\frac12=C_2$ 令 $C_1=C$

则 $\int f(x)dx=\begin{cases}\frac12x^2+x+C, & x\le1\\ x^2+\frac12+C, & x>1\end{cases}$

6、已知 $f(x)$的一个原函数为 $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$，求 $\int xf''(x)dx$

$f(x)=[\ln(x+\sqrt{1+x^2})]'=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}})=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

∴ $f'(x)=-x(1+x^2)^{-\frac32}$

∴ $\int xf''(x)dx=\int x\,d(f'(x))=xf'(x)-\int f'(x)dx$

$=x[-x(1+x^2)^{-\frac32}]-f(x)+C$

$=-x^2(1+x^2)^{-\frac32}-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+C$

# 第 5 章　定积分及其应用

## 5.1　定积分的概念

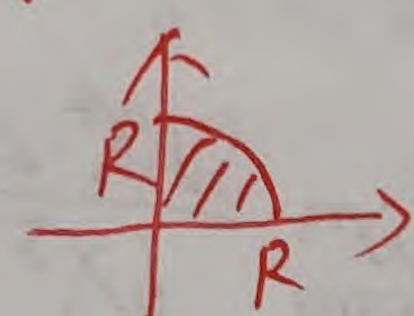
## 5.2　定积分的性质

**要求**：理解定积分的概念、性质及几何意义。

1、填空题

(1) $\int_{-1}^{1}|x|dx =$ ___1___ ；

(2) $\int_{0}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\,dx =$ ___$\frac{\pi}{4}R^2$___ 。




2、选择题

(1) 设 $I_1=\int_0^1 x dx,\ I_2=\int_0^1\sqrt{x}dx, I_3=\int_0^1\ln(1+x)dx$, 则 （ C ）

(A) $I_1>I_2>I_3$　　(B) $I_1>I_3>I_2$

(C) $I_2>I_1>I_3$　　(D) $I_3>I_2>I_1$

(2)由曲线 $y=x(x-1)(2-x)$ 与 $x$ 轴围成平面图形的面积 $S$=( C )

(A) $\int_0^1 x(x-1)(2-x)dx-\int_1^2 x(x-1)(2-x)dx$

(B) $-\int_0^2 x(x-1)(2-x)dx$

(C) $-\int_0^1 x(x-1)(2-x)dx+\int_1^2 x(x-1)(2-x)dx$

(D) $\int_0^2 x(x-1)(2-x)dx$

3、比较积分 $\int_1^2 \ln x dx$ 和 $\int_1^2(\ln x)^2 dx$ 的大小。

$1\le x\le 2<e$ 时 $0\le \ln x<\ln e=1$　∴ $(\ln x)^2\le \ln x$

∴ $\int_1^2 \ln x dx \ge \int_1^2 (\ln x)^2 dx$

4、试将 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$ 化为定积分。

$I=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+(\frac{1}{n})^2}+\frac{1}{1+(\frac{2}{n})^2}+\cdots+\frac{1}{1+(\frac{n}{n})^2}\right)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+(\frac{i}{n})^2}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx$

5、估计 $\int_2^0 e^{x^2-x}dx$ 的积分值。

先求 $e^{x^2-x}$ 在 $[0,2]$ 上的最小值 $m$，最大值 $M$.

令 $y=e^{x^2-x}$，$y'=(2x-1)e^{x^2-x}$. 令 $y'=0$ 得 $x=\frac{1}{2}$

比较 $y|_{x=0}=1$，$y|_{x=\frac{1}{2}}=e^{-\frac{1}{4}}$，$y|_{x=2}=e^2$

∴ $m=e^{-\frac{1}{4}}, M=e^2$　∴ $e^{-\frac{1}{4}}\le e^{x^2-x}\le e^2$

故 $2e^{-\frac{1}{4}}\le\int_0^2 e^{x^2-x}\le 2e^2$　∴ $-2e^2\le\int_2^0 e^{x^2-x}dx\le -2e^{-\frac{1}{4}}$

## 5.3 微积分基本定理

**要求：** 理解积分上限函数及其求导公式；熟练掌握牛顿-莱布尼茨公式。

1、填空题

$\frac{\cos t\,dt}{-\sin t\,dt}=-\cot t$

(1) 设 $x=\int_t^0 \sin u\,du$，$y=\int_0^t \cos u\,du$，则 $\frac{dy}{dx}=$ $\underline{-\cot t}$；

$=\lim\limits_{x\to a}\frac{x\int_a^x f(t)dt}{x-a}\overset{(L)}{=}\lim\limits_{x\to a}(\int_a^x f(t)dt+xf(x))=af(a)$

(2) 设 $f(x)$ 连续，则 $\lim\limits_{x\to a}\frac{\int_a^x xf(t)dt}{x-a}=$ $\underline{af(a)}$；

(3) 函数 $F(x)=\int_1^x (2-\frac{1}{\sqrt{t}})dt\ (x>0)$ 的单调减少区间是

$\underline{(0,\frac{1}{4}]}$。 $f(x)=2-\frac{1}{\sqrt{x}}>0$

2、选择题

(1) 设 $f(x)$ 连续，且 $F(x)=\int_x^{e^{-x}} f(t^2)dt$，则 $F'(x)=$（ A ）

(A) $-e^{-x}f(e^{-2x})-f(x^2)$ $F'(x)=f(e^{-2x})(-e^{-x})-f(x^2)$

(B) $-e^{-x}f(e^{-2x})+2xf(x^2)$

(C) $f(e^{-2x})2x-2xf(x^2)$

(D) $e^{-x}f(e^{-2x})-f(x^2)$

(2) 函数 $f(x)=\int_0^x \frac{3t+1}{t^2-t+1}dt$ 在区间[0,1]上 （ A ）

$f'(x)=\frac{3x+1}{x^2-x+1}>0$

(A) 单调增加 (B) 单调减少 (C) 先增后减 (D) 先减后增

(3) 函数 $f(x)=\int_0^x te^{-t}dt$ 在 $x=0$ 处取得 （ B ）

(A) 极大值 (B) 极小值 (C) 非极值点 (D) 拐点

$f'(x)=xe^{-x}=0$ 得 $x=0$，$x<0$ 时 $f'(x)<0$；$x>0$ 时 $f'(x)>0$

3、求由 $\int_0^y e^t dt+\int_0^x \cos t dt=0$ 所决定的隐函数 $y$ 对 $x$ 导

两边求导得 $e^y\cdot y'+\cos x=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{\cos x}{e^y}$

~~或~~ 先积分得 $e^y-1+\sin x=0$，$y=\ln(1-\sin x)$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\cos x}{\sin x-1}$

4、求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^6}\int_0^{x^2}\sin t^2 dt$

$\overset{(L)}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x^4\cdot 2x}{6x^5}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^4}{3x^4}=\frac{1}{3}$

5、计算下列定积分

(1) $\int_{-1}^0 \frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}dx$

$=\int_{-1}^0 (3x^2+\frac{1}{x^2+1})dx$

$=(x^3+\arctan x)\Big|_{-1}^0$

$=1+\frac{\pi}{4}$

(2) $\int_0^1 a^x e^x dx (a \neq \frac{1}{e})$

$= \int_0^1 (ae)^x dx = \frac{(ae)^x}{\ln(ae)} \Big|_0^1 = \frac{ae-1}{\ln a+1}$

(3) $\int_0^{2\pi} |\sin x| dx$

$= \int_0^{\pi} \sin x dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx$

$= -\cos x \Big|_0^{\pi} + \cos x \Big|_{\pi}^{2\pi} = 4$

(4) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$

$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left( \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx$

$= (\tan x - \cot x) \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} - \left( \frac{1}{\sqrt{3}} - \sqrt{3} \right) = \frac{4}{3}\sqrt{3}$

6、设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sin x & 0 \le x \le \pi \\ 0, & x < 0 \text{或} x > \pi \end{cases}$，求 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内的表达式。

$x<0$ 时 $F(x) = \int_0^x 0 dt = 0$

$0 \le x \le \pi$ 时，$F(x) = \int_0^x \frac{1}{2}\sin t dt = \frac{1}{2}(1-\cos x)$

$x > \pi$ 时，$F(x) = \int_0^{\pi} \frac{1}{2}\sin t dt + \int_{\pi}^{x} 0 dt = 1$

$\therefore F(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ \frac{1}{2}(1-\cos x) & 0 \le x \le \pi \\ 1 & x > \pi \end{cases}$

7、求 $a$、$b (a>0)$ 的值，使 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{bx - \sin x} \int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t}} dt = 1$ 。

$\because \lim\limits_{x \to 0} (bx - \sin x) = 0 \quad \therefore \lim\limits_{x \to 0} \int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t}} = 0$

又 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t}} dt}{bx - \sin x} \overset{(L)}{=} \lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{x^2}{\sqrt{a+x}}}{b - \cos x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2}{\sqrt{a+x}(b-\cos x)} =$

$a>0 \quad \lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0 \quad \therefore \lim\limits_{x \to 0} (b - \cos x) = 0 \quad \therefore b = 1$

$\therefore \lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2}{\sqrt{a+x}(b-\cos x)} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2}{1-\cos x} \cdot \frac{1}{\sqrt{a+x}} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{a}}$

$= \frac{2}{\sqrt{a}} = 1 \quad \therefore a = 4$

## 5.4 定积分的换元法与分部积分法

要求：熟练掌握定积分的换元法和分部积分法。

### 5.4.1 定积分的换元积分法

1、选择题

(1) 设$M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+x^2}\cos^4 x dx$，$N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3 x+\cos^4 x)dx$，

奇函数 $=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x dx>0$

$P=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^2\sin^3 x-\cos^4 x)dx$，则 $=-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x dx<0$ （ D ）

(A) $N<P<M$ (B) $M<P<N$

(C) $N<M<P$ (D) $P<M<N$

(2) 设$f(x)=\frac{d}{dx}\int_0^x \sin(t-x)dt$，则$f(x)=$ （ A ）

令$u=t-x$ 则 $f(x)=\frac{d}{du}\int_{-x}^{0}\sin u\,du\cdot\frac{du}{dx}=\frac{d}{du}\int_0^{x}\sin u\,du\cdot\frac{du}{dx}=\sin x\cdot(-1)=-\sin x$

(A) $-\sin x$ (B) $-1+\cos x$ (C) $\sin x$ (D) $1-\cos x$

2、计算下列定积分

(1) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x-\cos^3 x}\,dx$

$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x(1-\cos^2 x)}\,dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x\sin^2 x}\,dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x}\,|\sin x|\,dx$

$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x}\sin x\,dx=-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x)^{\frac{1}{2}}d(\cos x)=-\frac{4}{3}(\cos x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{4}{3}$

(2) $\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$

令$x=\sin t$，~~$t\in(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4})$~~

$I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{\sin^2 t}\cos t\,dt=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cot^2 t\,dt=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\csc^2 t-1)dt$

$=(-\cot t-t)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=1-\frac{\pi}{4}$

(3) $\int_1^4\frac{x}{1+\sqrt{x}}dx$

$\overset{t=\sqrt{x}}{=}\int_1^2\frac{t^2}{1+t}\cdot 2t\,dt=2\int_1^2\frac{t^3+1-1}{1+t}dt$

$=2\int_1^2(t^2-t+1)dt-2\int_1^2\frac{1}{1+t}dt$

$=2(\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t)\Big|_1^2-2\ln|1+t|\Big|_1^2=\frac{11}{3}-2\ln\frac{3}{2}$

3、证明：$\int_0^{\pi}\sin^n x dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx$ 。

$\int_0^{\pi}\sin^n x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^n x\,dx$

$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^n x\,dx\overset{令t=\pi-x}{=}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^n(\pi-t)\,d(-t)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\,dt$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$

$\therefore\int_0^{\pi}\sin^n x\,dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$

4、设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续、可导，且

$F(x)=\int_0^x(x-2t)f(t)dt$ 证明：若$f(x)$是偶函数，则$F(x)$也是偶函数。

$F(-x)=\int_0^{-x}(-x-2t)f(t)dt$

$=-x\int_0^{-x}f(t)dt-\int_0^{-x}2tf(t)dt$

令$u=-t$，$dt=-du$，$t=0,u=0$；$t=-x,u=x$

$F(-x)=-x\int_0^{x}f(-u)(-du)-2\int_0^{x}(-u)f(-u)(-du)$

$=x\int_0^{x}f(-u)du-2\int_0^{x}uf(-u)du$

$\because f(x)$为偶函数 $\therefore f(-u)=f(u)$

$\therefore F(-x)=x\int_0^{x}f(u)du-2\int_0^{x}uf(u)du$

$=\int_0^{x}(x-2u)f(u)du=F(x)$ $\therefore F(x)$也是偶函数

## 5.4.2 定积分的分部积分法

1、计算下列定积分

(1) $\int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$

$=2\int_1^4 \ln x\, d(\sqrt{x}) = 2\ln x\cdot\sqrt{x}\Big|_1^4 - 2\int_1^4 \sqrt{x}\cdot\frac{1}{x}dx$

$=(2\ln x\cdot\sqrt{x}-4\sqrt{x})\Big|_1^4 = 4\ln 4 - 4$

(2) $\int_0^1 x\arctan x\,dx$

$=\int_0^1 \arctan x\, d(\frac{x^2}{2}) = \frac12 x^2\arctan x\Big|_0^1 - \frac12\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx$

$=\frac12\cdot 1\cdot\frac{\pi}{4} - \frac12(x-\arctan x)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}-\frac12$

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x\,dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} d(\sin x) = e^{2x}\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2e^{2x}\sin x\,dx$

$=e^{\pi}+2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} d(\cos x) = e^{\pi}+2e^{2x}\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x\,dx$

$=e^{\pi}-2-4\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x\,dx$

$\therefore$ 原式 $=\frac15(e^{\pi}-2)$

(4) $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(2-x)^2}dx$

$=\int_0^1 \ln(1+x)\, d(\frac{1}{2-x}) = \frac{\ln(1+x)}{2-x}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2-x}\cdot\frac{1}{1+x}dx$

$=\ln 2 - \frac13\int_0^1\left(\frac{1}{2-x}+\frac{1}{1+x}\right)dx = \ln 2 - \frac13\ln\left|\frac{1+x}{2-x}\right|\Big|_0^1 = \frac13\ln 2$

(5) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x\sin x}{\cos^3 x}dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\tan x\, d(\tan x) = \frac12\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\, d(\tan^2 x) = \frac12 x\tan^2 x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac12\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sec^2 x-1)dx$

$=\frac{\pi}{8} - \frac12(\tan x - x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}-\frac12$

法二：$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{-x\, d(\cos x)}{\cos^3 x} = \frac12\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\, d(\frac{1}{\cos^2 x}) = \frac{x}{2\cos^2 x}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac12\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^2 x}dx$

$=\frac{\pi}{4}-\frac12\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}-\frac12$

(6) $\int_0^{\pi}\cos^8 x\,dx$

$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^8 x\,dx = 2\cdot\frac{(8-1)!!}{8!!}\cdot\frac{\pi}{2} = 2\cdot\frac{7\times5\times3\times1}{8\times6\times4\times2}\cdot\frac{\pi}{2}$

$=\frac{105\pi}{384} = \frac{35\pi}{128}$

2、设 $\int_0^2 f(x)dx=1$，且 $f(2)=\frac12, f'(2)=0$，求 $\int_0^1 x^2 f''(2x)dx$。

$\int_0^1 x^2 f''(2x)dx = \frac12\int_0^1 x^2\, d(f'(2x)) = \frac12 x^2 f'(2x)\Big|_0^1 - \frac12\int_0^1 f'(2x)\cdot 2x\,dx$

$=\frac12(f'(2)-0) - \frac12\int_0^1 x\, d(f(2x)) = -\frac12 x f(2x)\Big|_0^1 - \frac12\int_0^1 f(2x)dx$

$\overset{t=2x}{=} -\frac12(f(2)-0)+\frac12\int_0^2 f(t)\cdot\frac12 dt = -\frac14+\frac14 = 0$

# 5.5 广义积分

**要求：**了解广义积分的定义，会计算较简单的广义积分。

1、填空题(收敛还是发散，若收敛，填入其值)

(1) $\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x}\Big|_1^{+\infty}$ 发散

(2) $\int_0^{+\infty} e^{-ax}dx(a>o) = -\frac{1}{a}e^{-ax}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{a}$

(3) $\int_0^2 \frac{1}{(1-x)^2}dx = \frac{1}{1-x}\Big|_0^1 + \frac{1}{1-x}\Big|_1^2$ 发散

2、判定下列广义积分的收敛性，若收敛，计算广义积分的值。

(1) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\arctan x}{1+x^2}dx$

$=\int_{-\infty}^{+\infty}\arctan x\, d(\arctan x) = \frac{1}{2}(\arctan x)^2\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0$

(2) $\int_0^1 \ln x dx$

$= x\ln x\Big|_0^1 - x\Big|_0^1 = -1$

(3) $\int_1^e \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}dx$

$=\int_1^e \frac{1}{\sqrt{1-\ln^2 x}}d(\ln x) = \arcsin(\ln x)\Big|_1^e = \frac{\pi}{2}$

(4) $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\frac{1}{\sqrt{|x-x^2|}}dx$

$=\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx + \int_1^{\frac{3}{2}}\frac{1}{\sqrt{x(x-1)}}dx$

$=\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{(\frac{1}{2})^2-(x-\frac{1}{2})^2}}dx + \int_1^{\frac{3}{2}}\frac{1}{\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2-(\frac{1}{2})^2}}$

$=\arcsin\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\Big|_{\frac{1}{2}}^1 + \ln|(x-\frac{1}{2})+\sqrt{x^2-x}|\Big|_1^{\frac{3}{2}}$

$=\frac{\pi}{2} + \ln(2+\sqrt{3})$

3、当 $k$ 为何值时，广义积分 $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^k}$ 收敛？当 $k$ 为

广义积分发散？

$k=1$ 时 $I=\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x} = \ln(\ln x)\Big|_2^{+\infty} = \infty$ 发散

$k\neq 1$ 时 $I=\int_2^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^k}dx = \int_2^{+\infty}\frac{d(\ln x)}{(\ln x)^k} = \frac{1}{-k+1}(\ln x)^{-k+1}$

$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^{1-k}}{1-k} - \frac{(\ln 2)^{1-k}}{1-k}$

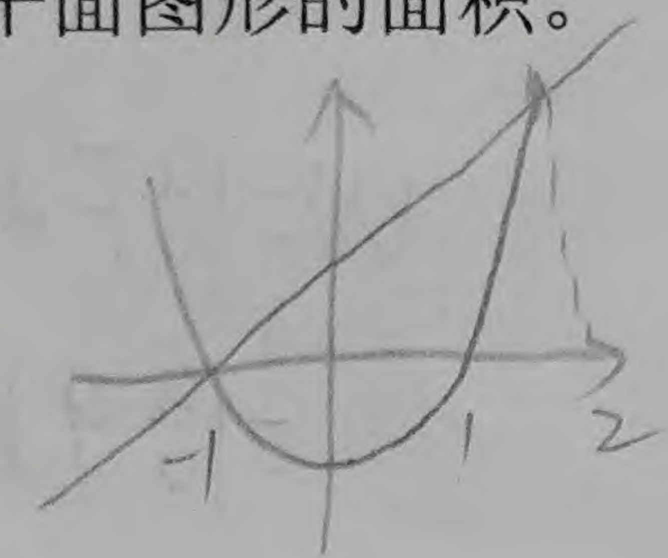
当 $1-k<0$ 即 $k>1$ 时收敛；$k\leq 1$ 时发散.

## 5.6 定积分的几何应用

要求：掌握定积分的元素法，掌握用定积分来计算一些几何量。

1、求曲线 $y+1=x^2$ 和直线 $y=1+x$ 所围成平面图形的面积。

$S=\int_{-1}^{2}[(1+x)-(x^2-1)]dx=\frac{9}{2}$

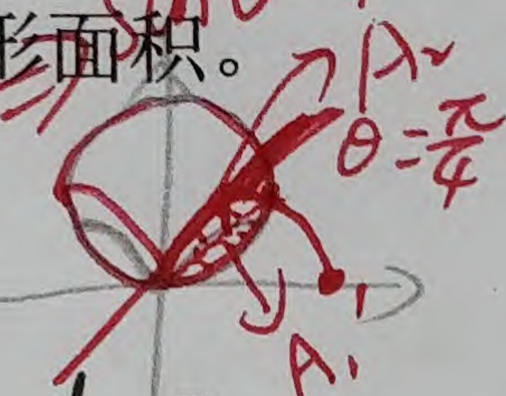



$\rho^2\ge0\Rightarrow\cos2\theta\ge0\Rightarrow2\theta\le\frac{\pi}{2}\Rightarrow0<\theta\le\frac{\pi}{4}$

双纽线 $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$

2、求曲线 $\rho^2=\cos2\theta$ 与 $\rho=\sqrt{2}\sin\theta$ 所围平面图形面积。

$\sin^2\theta=\frac14$　$\theta=\frac{\pi}{4}$




$\begin{cases}\rho^2=\cos2\theta\\ \rho=\sqrt{2}\sin\theta\end{cases}\Rightarrow\cos2\theta=2\sin^2\theta$　$\because\cos2\theta=1-2\sin^2\theta$

$\therefore\sin^2\theta=\frac14$　$\theta=\frac{\pi}{6}$

$\therefore A=2\left[\frac12\int_0^{\frac{\pi}{6}}(\sqrt2\sin\theta)^2d\theta+\frac12\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\cos2\theta\,d\theta\right]$

$=2\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1-\cos2\theta}{2}d\theta+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\cos2\theta\,d(2\theta)\cdot\frac12$

$=\frac{\pi}{6}+\frac{1-\sqrt3}{2}$

3、求曲线 $y=\ln x$ 上相应于 $\sqrt{3}\le x\le2\sqrt{2}$ 的一段弧的长度。

$\because ds=\sqrt{1+y'^2}dx=\frac{1}{x}\sqrt{x^2+1}dx$

$\therefore S=\int_{\sqrt3}^{2\sqrt2}\frac{1}{x}\sqrt{x^2+1}dx\xlongequal{t=\sqrt{x^2+1}}\int_2^3\frac{t^2}{t^2-1}dt$

$=\left(t+\frac12\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right)\Big|_2^3=1+\frac12\ln\frac32$

4、求曲线 $x=a\cos^3t,y=a\sin^3t$ 的长度。

$S=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(3a\cos^2t\sin t)^2+(3a\sin^2t\cos t)^2}dt$

$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}3a\sin t\cos t\,dt=3a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin2t\,d(2t)=3a(-\cos2t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=6a$

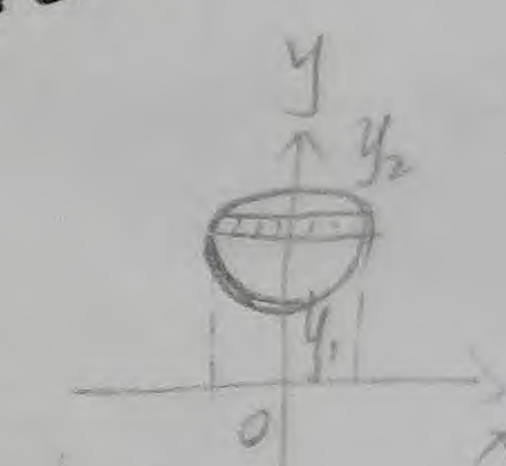
5、由 $y=x^3,x=2,y=0$ 所围成的图形分别绕 $x$ 轴及 $y$ 轴旋转所得立体的体积。

绕x轴旋转：$V=\pi\int_0^2y^2dx=\pi\int_0^2(x^3)^2dx=\frac{128}{7}\pi$

绕y轴旋转(以y为积分变量)：

$V=\pi\int_0^8 2^2dy-\pi\int_0^8(\sqrt[3]{y})^2dy=\pi\int_0^8 4dy-\pi\int_0^8y^{\frac23}dy=\frac{64}{5}\pi$

法2：以x为积分变量：$V=\int_0^2 2\pi x\cdot x^3dx=2\pi\cdot\frac{x^5}{5}\Big|_0^2=\frac{64}{5}\pi$




6、求圆盘 $x^2+(y-5)^2\le9$ 绕 $x$ 轴旋转而成的旋转体的体积。

$y=5\pm\sqrt{9-x^2}$　$y_2=5+\sqrt{9-x^2},\ y_1=5-\sqrt{9-x^2}$

$V=\pi\int_{-3}^3y_2^2dx-\pi\int_{-3}^3y_1^2dx=\pi\int_{-3}^3[(5+\sqrt{9-x^2})^2-(5-\sqrt{9-x^2})^2]dx$

$=20\pi\int_{-3}^3\sqrt{9-x^2}dx=40\pi\int_0^3\sqrt{9-x^2}dx=40\pi\cdot\frac{\pi}{4}\cdot3^2=90\pi^2$

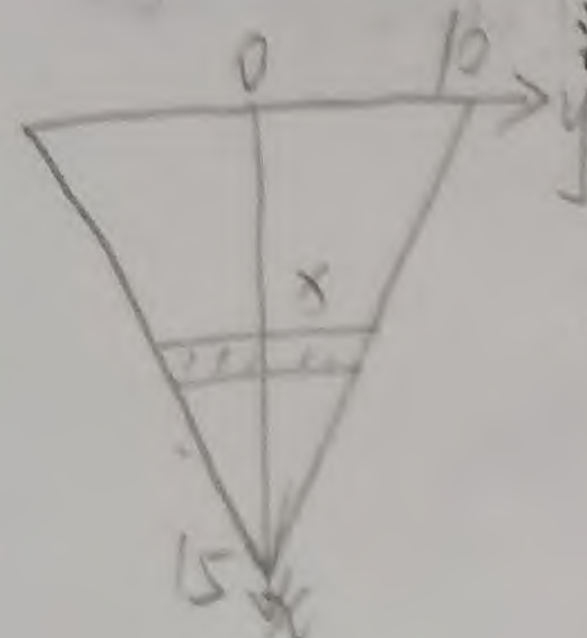
法二：$dV=2\pi y\cdot2x\,dy$

$V=\int_2^8 4\pi y\sqrt{9-(y-5)^2}dy=2\pi\cdot\frac23[9-(y-5)^2]^{\frac32}\Big|_2^8+20\pi\left(\frac92\arcsin\frac{y-5}{3}+\frac12(y-5)\sqrt{9-(y-5)^2}\right)\Big|_2^8=0+20\pi\cdot\frac92\pi=90\pi^2$

# 5.7 定积分的物理应用

要求：掌握用定积分来计算一些物理量。

1、设一锥形贮水池，深 15 米，口径 20 米，盛满水，试问要把池内的水全部吸出需作多少功？




建立如图坐标系，直线AB的方程为 $y=\frac{2}{3}(15-x)$

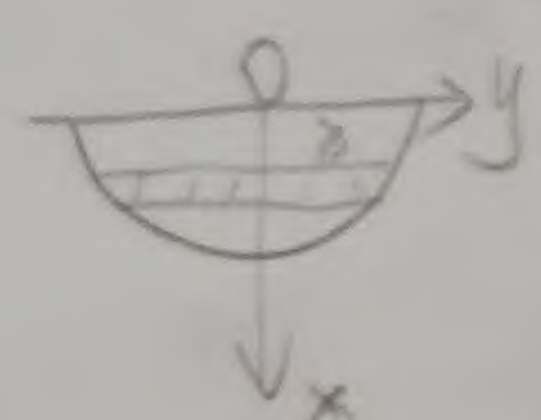
薄层(x处)的重力 $\rho g\pi y^2dx=\rho g\pi[\frac{2}{3}(15-x)]^2dx$

作功 $W=\int_0^{15}\rho g\pi\cdot\frac{4}{9}(15-x)^2xdx$（将薄层水提升x米）

$=\frac{4}{9}\pi\rho g(225\cdot\frac{x^2}{2}-10x^3+\frac{x^4}{4})\Big|_0^{15}$

$=1875\pi\rho g$ (kJ)

2、设有一半径为 R 米的半球形水池，盛满水，若将池中水全部吸出需作多少功？




建立如图坐标系 薄层重力为：$\rho g\pi(R^2-x^2)dx$

$dW=\rho g\pi(R^2-x^2)xdx$

作功 $W=\int_0^R\rho g\pi(R^2-x^2)xdx=\frac{\pi}{4}\rho gR^4$ (kJ)

$dF=p\,ds$

压强 面积

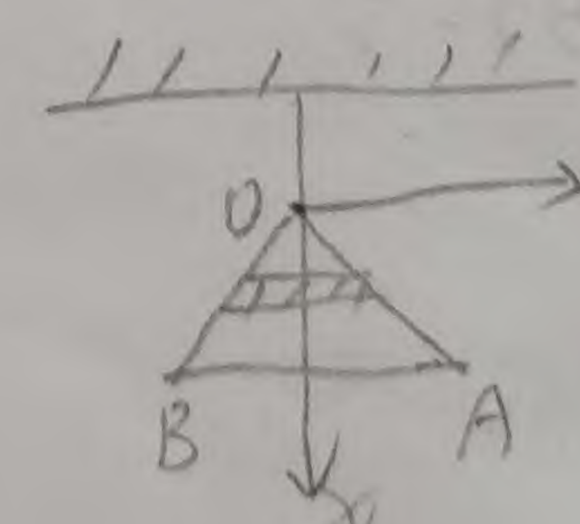
3、一物体按规律 $x=ct^3\ (c>0)$ 作直线运动，介质的阻
的平方成正比，计算物体由 $x=0$ 移至 $x=a$时，克
力所作的功。

$F=kv^2=k(\frac{dx}{dt})^2=k(3ct^2)^2$

$W=\int_0^aF\,dx=\int_0^ak(3ct^2)^2dx$

$=\int_0^a9kc^{\frac{2}{3}}x^{\frac{4}{3}}dx=\frac{27}{7}kc^{\frac{2}{3}}a^{\frac{7}{3}}$

4、一底为 8 米，高为 6 米的等腰三角形片，铅直地沉
顶在上，底在下且与水面平行，而顶离水面 3 米，
面所受的压力。

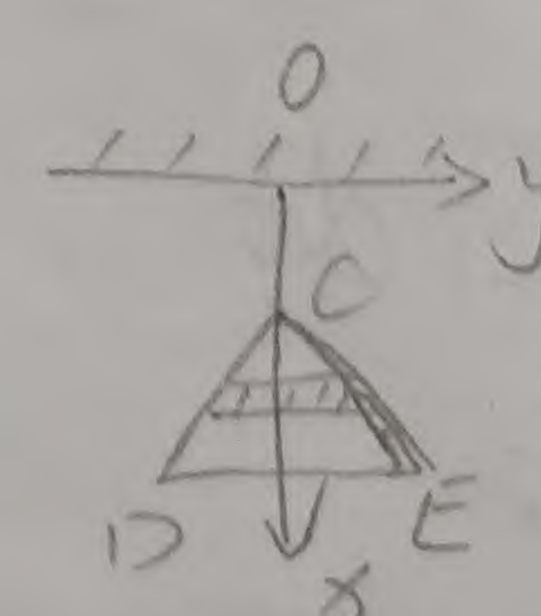



建立如图坐标系

OA的方程：$y=\frac{4}{6}x=\frac{2}{3}x$，$ds=2ydx=\frac{4}{3}xdx$

$dF=\rho g(x+3)\cdot\frac{4}{3}xdx$

压力 $F=\int_0^6\frac{4}{3}\rho g(x+3)\cdot xdx=168\rho g$ (N)




法二：建立如图坐标系：

$\frac{y}{x-3}=\frac{4}{6}$ CE的方程为 $y=\frac{2}{3}(x-3)$

$dF=\rho g x\cdot 2\cdot\underbrace{\frac{2}{3}(x-3)}_{y}dx$

压力 $F=\int_3^9\frac{4}{3}\rho gx(x-3)dx=168\rho g$ (N)

## 5.8 总习题

$\ln\frac{1-(-x)}{1+(-x)} = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-1} = -\ln\frac{1-x}{1+x}$ $\therefore \ln\frac{1-x}{1+x}$ 为奇函数.

一、填空题

(1) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \ln\frac{1-x}{1+x}dx =$ $\underline{\quad 0 \quad}$；

$F(\frac{1}{x}) = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{\ln t}{1+t^2}dt \overset{u=\frac{1}{t}}{=} \int_1^x \frac{-\ln u}{1+(\frac{1}{u})^2}(-\frac{1}{u^2})du = F(x)$

(2) 设 $F(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2}dt$，则 $F(x) - F(\frac{1}{x}) =$ $\underline{\quad 0 \quad}$；

$= \frac{1}{2}e^{2t}(t-\frac{1}{2})\Big|_{-\infty}^{c} = \frac{1}{2}e^{2c}(c-\frac{1}{2})$

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x = \int_{-\infty}^{c} te^{2t}dt$，求 $c =$ $\underline{\quad \frac{5}{2} \quad}$。

$\because \lim\limits_{x\to\infty} e^{x\cdot(\frac{x+c}{x-c}-1)} = \lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{2cx}{x-c}} = e^{2c}$

2、选择题

(1) 设 $f(x) = \int_0^{\sqrt{1+x}-1}\ln(1+t)dt, g(x) = \int_0^{\frac{x}{2}}\arcsin t dt$，则 $x\to 0$ 时

$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+\sqrt{1+x}-1)\cdot\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}}{\arcsin\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2}} = \lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x\cdot\frac{1}{2}}{\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2}} = 1$ ( D )

(A) $f(x)$ 是 $g(x)$ 的高阶无穷小　(B) $f(x)$ 与 $g(x)$ 的同阶无穷小

(C) $f(x)$ 是 $g(x)$ 的低阶无穷小　(D) $f(x)$ 与 $g(x)$ 等价

(2) 已知 $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x$ $= \begin{cases} x & |x|<1 \\ 0 & |x|=1 \\ -x & |x|>1 \end{cases}$，则 $\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 x dx + \int_1^2(-x)dx = -1$ ( A )

(A) $-1$　(B) 0　(C) 1　(D) 2

令 $u=tx$ 则 $I = t\int_0^s f(u)\cdot\frac{1}{t}du = \int_0^s f(u)du$

(3) 设 $I = t\int_0^{\frac{s}{t}} f(tx)dx$，其中 $f(x)$ 连续，$t>0$，$s>0$，则 $I$ 的值

(A) 依赖于 $s, t$　(B) 依赖于 $t, x$，不依赖于 $s$　( D )

(C) 依赖于 $s, t, x$　(D) 依赖于 $s$，不依赖于 $t$

(4) 下列广义积分收敛的是 ( C )

(A) $\int_e^{+\infty}\frac{\ln x}{x}dx = \frac{1}{2}\ln^2 x\Big|_e^{+\infty} = +\infty$　(B) $\int_e^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}dx = \ln(\ln x)\Big|_e^{+\infty} = +\infty$

(C) $\int_e^{+\infty}\frac{1}{x\ln^2 x}dx$ $= -\frac{1}{\ln x}\Big|_e^{+\infty} = 1$　(D) $\int_e^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{\ln x}}dx = 2\sqrt{\ln x}\Big|_e^{+\infty} = +\infty$

(5) 由曲线 $y = \sin^{\frac{3}{2}} x (0 \le x \le \pi)$ 与 $x$ 轴围成的平面图形绕 $x$ 轴旋转而成的旋转体体积是 $V = \int_0^\pi \pi(\sin^{\frac{3}{2}}x)^2 dx = \pi\int_0^\pi \sin^3 x dx$ ( B )

(A) $\frac{4}{3}$　(B) $\frac{4}{3}\pi$　(C) $\frac{2}{3}\pi^2$　(D) $\frac{2}{3}\pi$

3、计算题

(1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x - \int_0^x e^{t^2}dt}{x^2\sin 2x}$

$= \lim\limits_{x\to0}\frac{x-\int_0^x e^{t^2}dt}{x^2\cdot 2x} = \lim\limits_{x\to0}\frac{1-e^{x^2}}{2\cdot3x^2} = \lim\limits_{x\to0}\frac{-x^2}{6x^2} = -\frac{1}{6}$

(2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2}[\int_0^u \sin t^2 dt]du}{x^8}$

$\overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2}\sin t^2 dt\cdot 2x}{8x^7} = \lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2}\sin t^2 dt}{4x^6} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(x^2)^2\cdot 2x}{24x^5}$

$= \lim\limits_{x\to0}\frac{x^4\cdot 2x}{24x^5} = \frac{1}{12}$

(3) 设 $x + y^2 = \int_0^{y-x}\cos^2 t dt$，求 $\frac{dy}{dx}$。

两边对 $x$ 求导得

$1 + 2yy' = \cos^2(y-x)(y'-1)$

$\therefore y' = \frac{1+\cos^2(y-x)}{\cos^2(y-x)-2y}$

$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{\sin t+\cos t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{\cos t+\sin t}dt$

$\frac{1}{2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{\sin t+\cos t}dt+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{\sin t+\cos t}dt\right]$

$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}dt=\frac{\pi}{4}$

(4) $\int_0^1\frac{1}{x+\sqrt{1-x^2}}dx$

令 $x=\sin t$ 则 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{\sin t+\cos t}dt=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\sin t+\cos t)+(\cos t-\sin t)}{\sin t+\cos t}dt$

$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}dt+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d(\sin t+\cos t)}{\sin t+\cos t}$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\ln|\sin t+\cos t|\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$

(5) $\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$

令 $x=\sin t$ 则有

$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos^2 t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2 t-\sin^4 t)dt$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{16}$

(6) $\int_{\frac{3}{4}}^1\frac{1}{\sqrt{1-x}-1}dx$

令 $\sqrt{1-x}=t$ 则

$I=\int_{\frac{1}{2}}^0\frac{1}{t-1}\cdot(-2t)dt=2\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{t-1+1}{t-1}dt$

$=2(t+\ln|t-1|)\Big|_0^{\frac{1}{2}}=1-2\ln2=1-\ln4$

(7) $\int_0^\pi x^2\sin^2 x\,dx$

$I=\frac{1}{2}\int_0^\pi x^2(1-\cos2x)dx=\frac{1}{2}\int_0^\pi x^2dx-\frac{1}{2}\int_0^\pi x^2\cos2x\,dx$

$=\frac{\pi^3}{6}-\frac{1}{2}\int_0^\pi x^2\cos2x\,dx$

又 $\int_0^\pi x^2\cos2x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^\pi x^2d(\sin2x)=\frac{1}{2}x^2\sin2x\Big|_0^\pi-\frac{1}{2}\int_0^\pi\sin2x\cdot2x\,dx$

$=\frac{1}{2}\int_0^\pi x\,d(\cos2x)=\frac{1}{2}x\cos2x\Big|_0^\pi-\frac{1}{2}\int_0^\pi\cos2x\,dx=\frac{\pi}{2}$

$\therefore I=\frac{\pi^3}{6}-\frac{\pi}{4}$

(8) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{1+\cos2x}dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{2\cos^2x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}x\,d(\tan x)$

$=\frac{1}{2}x\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,dx=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}\ln|\cos x|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$

$=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\ln2$

(9) $\int_0^1\frac{xe^x}{(1+e^x)^2}dx$

$=\int_0^1\frac{x\,d(e^x+1)}{(1+e^x)^2}=-\int_0^1 x\,d\left(\frac{1}{e^x+1}\right)=-x\cdot\frac{1}{e^x+1}\Big|_0^1+\int_0^1\frac{1}{e^x+1}dx$

$=-\frac{1}{e+1}+\int_0^1\left(1-\frac{e^x}{e^x+1}\right)dx=-\frac{1}{e+1}+[x-\ln(e^x+1)]\Big|_0^1$

$=\frac{e}{e+1}+\ln\frac{2}{e+1}$

(10) $\int_0^{+\infty}e^{-2x}\sin x\,dx$

$\because\int e^{-2x}\sin x\,dx=\int\left(-\frac{1}{2}\right)\sin x\,d(e^{-2x})=\frac{1}{2}\left(e^{-2x}\sin x-\int e^{-2x}\cos x\,dx\right)$

$=-\frac{1}{2}e^{-2x}\sin x-\frac{1}{4}\int\cos x\,d(e^{-2x})$

$=-\frac{1}{2}e^{-2x}\sin x-\frac{1}{4}\cos x\,e^{-2x}-\frac{1}{4}\int e^{-2x}\sin x\,dx$

$\therefore\int e^{-2x}\sin x\,dx=\frac{1}{5}e^{-2x}(2\sin x+\cos x)$

$\therefore I=\lim_{x\to+\infty}-\frac{1}{5}e^{-2x}(2\sin x+\cos x)+\frac{1}{5}=\frac{1}{5}$

(11) $\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x)(1+x^2)}dx$

$=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{1+x}-\frac{x-1}{1+x^2}\right)dx$

$=\frac{1}{2}\left[\ln|1+x|-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\arctan x\right]\Big|_0^{+\infty}$

$=\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to+\infty}\ln\left|\frac{1+x}{\sqrt{x^2+1}}\right|+\lim_{x\to+\infty}\arctan x-0\right)$

$=\frac{\pi}{4}$

4、设 $f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x\ge 0 \\ 1+x^2, & x<0 \end{cases}$，求 $\int_1^3 f(x-2)dx$

$\int_1^3 f(x-2)dx \overset{令u=x-2}{=\!=\!=} \int_{-1}^1 f(u)du$

$=\int_{-1}^0 (1+x^2)dx+\int_0^1 e^{-x}dx$

$=(x+\frac{x^3}{3})\Big|_{-1}^0+(-e^{-x})\Big|_0^1$

$=\frac{7}{3}-e^{-1} = \frac{7}{3}-\frac{1}{e}$

5、设 $f(x)=\begin{cases} 1, & x<-1 \\ \frac{1}{2}(1-x), & -1\le x\le 1 \\ x-1, & x>1 \end{cases}$，求 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内的表达式。

$x<-1$ 时，$F(x)=\int_0^1\frac{1}{2}(1-x)dx+\int_{-1}^x 1dx=x+\frac{1}{4}$

$-1\le x<1$ 时，$F(x)=\int_0^x\frac{1}{2}(1-x)dx=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}x^2$

$x\ge1$ 时，$F(x)=\int_0^1\frac{1}{2}(1-x)dx+\int_1^x(x-1)dx=\frac{1}{2}x^2-x+\frac{3}{4}$

$\therefore F(x)=\begin{cases} x+\frac{1}{4}, & x<-1 \\ \frac{1}{2}x-\frac{1}{4}x^2, & -1\le x<1 \\ \frac{1}{2}x^2-x+\frac{3}{4}, & x\ge 1 \end{cases}$

6、设 $f(x)=\int_0^x e^{-y^2+2y}dy$，求 $\int_0^1(1-x)^2 f(x)dx$。

$\int_0^1(1-x)^2f(x)dx=\frac{1}{3}\int_0^1 f(x)d((x-1)^3)$

$=\frac{1}{3}(x-1)^3f(x)\Big|_0^1-\frac{1}{3}\int_0^1(x-1)^3f'(x)dx=-\frac{1}{3}\int_0^1(x-1)^3f'(x)dx$

$=-\frac{1}{3}\int_0^1(x-1)^3\cdot e^{-x^2+2x}dx=-\frac{1}{3}\int_0^1(x-1)^3e^{-(x-1)^2+1}dx$

$=-\frac{1}{6}\int_0^1(x-1)^2e^{-(x-1)^2+1}d((x-1)^2)$ 令 $t=(x-1)^2$

$=\frac{1}{6}\int_0^1 te^{-t+1}dt=-\frac{1}{6}\int_0^1 td(e^{-t+1})$

$=-\frac{1}{6}te^{-t+1}\Big|_0^1+\frac{1}{6}\int_0^1 e^{-t+1}dt=-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}(-e^{-t+1})\Big|_0^1$

$=-\frac{1}{3}+\frac{e}{6}$

7、设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，在开区间 $(0,1)$ 可微，且满足 $f(1)=k\int_0^{\frac{1}{k}}xe^{1-x}f(x)dx\ (k>1)$，求证：至少存在一点 $\eta\in(0,1)$，使得 $f'(\eta)=(1-\frac{1}{\eta})f(\eta)$。

令 $F(x)=xe^{1-x}f(x)$，$F(0)=0$

$F(1)=f(1)=k\int_0^{\frac{1}{k}}F(x)dx \overset{积分中值定理}{\underset{\exists\xi\in(0,\frac{1}{k})}{=\!=\!=}} k\cdot F(\xi)(\frac{1}{k}-0)$

$=F(\xi)$

$F(x)$ 在 $[\xi,1]$ 上满足罗尔定理的条件

$\therefore \exists\eta\in(\xi,1)$ 使 $F'(\eta)=0$

$F'(x)=e^{1-x}[f(x)-xf(x)+xf'(x)]$

$\because e^{1-\eta}>0 \quad \therefore f(\eta)-\eta f(\eta)+\eta f'(\eta)=0$

即 $f'(\eta)=(1-\frac{1}{\eta})f(\eta)$

8、设函数 $f(x)$在$[0,a](a>0)$上有连续导数,且 $f(0)=0$ 证明:

$$\left|\int_0^a f(x)dx\right| \le \frac{Ma^2}{2},\quad 其中\ M=\max_{0\le x\le a}|f'(x)|。$$

$f(x)$在$[0,a]$上满足拉格朗日中值定理的条件

$f(x)-f(0)=f(x)-0=f'(\xi)(x-0)$, $\xi\in(0,x)$

$\therefore |f(x)|=|f'(\xi)\cdot x|\le Mx$

由积分的性质得

$\left|\int_0^a f(x)dx\right|\le\int_0^a|f(x)|dx\le\int_0^a Mxdx$

$=\frac{M}{2}x^2\Big|_0^a=\frac{M}{2}a^2$

9、设$f(x)$在$[0,1]$上可微，且 $x\in(0,1), 0<f'(x)<1, f(0)=0$,

证明：$[\int_0^1 f(x)dx]^2>\int_0^1 f^3(x)dx$。

令 $F(t)=[\int_0^t f(x)dx]^2-\int_0^t f^3(x)dx$

$F'(t)=2\int_0^t f(x)dx\cdot f(t)-f^3(t)=f(t)[2\int_0^t f(x)dx-f^2(t)]$

$\because f'(x)>0$, $\therefore f(x)\nearrow$ $\because x>0$ $\therefore f(x)>f(0)=0$

令$G(t)=\int_0^t 2f(x)dx-f^2(t)$ $\quad G'(t)=2f(t)[1-f'(t)]$

$\because f'(t)<1$ $\therefore G'(t)>0$ $\therefore G(t)\nearrow$ $t>0$, $G(t)>G(0)=0$

10、求曲线 $y=|\ln x|, x=e, x=\frac{1}{e}$ 及$y=0$ 所围平面图形

解：$S=\int_{\frac{1}{e}}^e|\ln x|dx=\int_{\frac{1}{e}}^1(-\ln x)dx+\int_1^e\ln xdx$

$=-\int_{\frac{1}{e}}^1\ln xdx+\int_1^e\ln xdx$

$=-(x\ln x-x)\Big|_{\frac{1}{e}}^1+(x\ln x-x)\Big|_1^e$

$=2-\frac{2}{e}$

(因 $\int\ln xdx=x\ln x-\int x\cdot\frac{1}{x}dx=x\ln x-x+C$)

11、过点$(1,0)$作抛物线 $y=\sqrt{x-2}$ 的切线，求由这条切线、抛物线及$x$轴所围成的平面图形绕$x$轴旋转一周所得旋转体的

设切点为$(x_0,y_0)$，$y'|_{x=x_0}=\frac{1}{2\sqrt{x_0-2}}$

切线：$y-y_0=\frac{1}{2\sqrt{x_0-2}}(x-x_0)$

切点过$(1,0)$，$(1,0)$在抛物线上则有

$\begin{cases}-y_0=\frac{1}{2\sqrt{x_0-2}}(1-x_0)\\ y_0=\sqrt{x_0-2}\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}x_0=3\\ y_0=1\end{cases}$

$\therefore$切线：$y=\frac{1}{2}(x-1)$

绕x轴：$V_x=\pi\int_1^3[\frac{1}{2}(x-1)]^2dx-\pi\int_2^3(x-2)dx$

$=\frac{2}{3}\pi-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{6}$

绕y轴：$V_y=\pi\int_0^1(y^2+2)^2dy-\pi\int_0^1(2y+1)^2dy$

# 第 6 章 常微分方程

## 6.1 微分方程的基本概念

要求：理解微分方程的阶、解、通解、特解、初始条件等概念。

## 6.2 一阶微分方程

### 6.2.1 可分离变量的微分方程

要求：熟练掌握可分离变量方程的解法，会解齐次方程。

1、解下列可分离变量的方程。

(1) $y'+x^2y=0$ （可分离变量）

$\frac{1}{y}dy=-x^2dx$ $\ln|y|=-\frac{1}{3}x^3+|C_1|$

$\therefore y=Ce^{-\frac{1}{3}x^3}$

(2) $y'=\dfrac{1+y^2}{xy(1+x^2)}$ （可分离变量）

$\frac{y}{1+y^2}dy=\frac{1}{x(1+x^2)}dx=(\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2})dx$

$\frac{1}{2}\ln(1+y^2)=\frac{1}{2}\ln x^2-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+\frac{1}{2}\ln C$

$(1+x^2)(1+y^2)=Cx^2$

(3) $ydx+\sqrt{x^2+1}dy=0$ （可分离变量）

$\frac{1}{y}dy=-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx$

$\ln|y|=-\ln(x+\sqrt{x^2+1})+\ln|C|$

$y(x+\sqrt{x^2+1})=C$

2、用适当的变量代换求下列方程的通解。

(1) $xy'=y(1+\ln y-\ln x)$ （齐次）

$y'=\frac{y}{x}(1+\ln\frac{y}{x})$ 令 $u=\frac{y}{x}$，$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$

$u+x\frac{du}{dx}=u(1+\ln u)$ $\frac{1}{u\ln u}du=\frac{1}{x}dx$

$\ln|\ln u|=\ln x+\ln C$ $\ln u=Cx$ $u=e^{Cx}$

$\therefore y=xe^{Cx}$

(2) $x^2ydx-(x^3+y^3)dy=0$ （齐次）

$\frac{y}{x}dx-[1+(\frac{y}{x})^3]dy=0$ 令 $u=\frac{y}{x}$

$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}=\frac{u}{1+u^3}$

$\frac{1}{x}dx=-\frac{1+u^3}{u^4}du=-\frac{1}{u^4}du-\frac{1}{u}du$

$\ln|C_1|+\ln|x|=\frac{1}{3u^3}-\ln|u|$ $\ln|C_1ux|=\frac{1}{3u^3}$

$\ln|C_1y|=\frac{x^3}{3y^3}$ $\therefore y=Ce^{\frac{x^3}{3y^3}}$

## 6.2.2 一阶线性微分方程

**要求：**熟练掌握一阶线性方程的解法，了解常数变易法，会解伯努利方程。

1、求下列一阶线性微分方程的通解。（一阶线性）

(1) $y'+y=e^{-x}$

$y=e^{-\int dx}[\int e^{-x}\cdot e^{\int 1dx}dx+C]$

$=e^{-x}(C+\int e^{-x}\cdot e^{x}dx)=e^{-x}(C+x)$

(2) $(x-2xy-y^2)y'+y^2=0$ （一阶线性）

$\frac{dx}{dy}+\frac{1-2y}{y^2}x=1$

$x=e^{-\int\frac{1-2y}{y^2}dy}(C+\int 1\cdot e^{\int\frac{1-2y}{y^2}dy}dy)$

$=e^{\frac{1}{y}+2\ln y}(C+\int e^{-\frac{1}{y}-2\ln y}dy)$

$=y^2e^{\frac{1}{y}}(C+\int y^{-2}e^{-\frac{1}{y}}dy)=y^2e^{\frac{1}{y}}(C+e^{-\frac{1}{y}})$

$=Cy^2e^{\frac{1}{y}}+y^2=y^2(Ce^{\frac{1}{y}}+1)$

2、求下列微分方程满足初始条件的特解。

(1) $y'-\frac{1}{x}y=x^2, y(1)=1$ （一阶线性）

$y=e^{\int\frac{1}{x}dx}(C+\int x^2e^{\int-\frac{1}{x}dx}dx)$

$=x(C+\int x^2\cdot\frac{1}{x}dx)=x(\frac{x^2}{2}+C)$

$\because y(1)=1 \quad \therefore C=\frac{1}{2}$

$\therefore$ 特解：$y=\frac{x^3}{2}+\frac{1}{2}x$

(2) $y'+y\cos x=\sin x\cos x, y(0)=1$ （一阶线性）

$y=e^{-\int\cos x dx}(C+\int\sin x\cos x\cdot e^{\int\cos x dx}dx)$

$=e^{-\sin x}(C+\int\sin x e^{\sin x}d(\sin x))$

$=e^{-\sin x}(C+\int\sin x d(e^{\sin x}))=e^{-\sin x}(C+\sin x e^{\sin x}-e^{\sin x})$

$=Ce^{-\sin x}+\sin x-1$

$\because y(0)=C-1=1 \quad \therefore C=2$

$\therefore$ 特解 $y=2e^{-\sin x}+\sin x-1$

3、求 $y'+\frac{y}{x}=x^2y^6$ 的通解。（伯努利）

伯努利方程：

令 $z=y^{1-6}=y^{-5}$ 方程化为 $\frac{1}{y^6}y'+\frac{1}{x}y^{-5}=x^2$ 即 $\frac{dz}{dx}-\frac{5}{x}z=-5x^2$

$z=e^{\int\frac{5}{x}dx}[C+\int(-5x^2)e^{-\int\frac{5}{x}dx}dx]$

$=x^5(C+\frac{5}{2}x^{-2})=Cx^5+\frac{5}{2}x^3$

$\therefore y^{-5}=Cx^5+\frac{5}{2}x^3$

4、求一连续可导函数 $f(x)$，使其满足下列方程

$f(x)=\sin x-\int_0^x f(x-t)dt$ 。（一阶线性）

令 $u=x-t$ 则 $\int_0^x f(x-t)dt=\int_x^0 f(u)(-du)=\int_0^x f(u)du$

$\because f(x)$ 连续 $\therefore \int_0^x f(u)du$ 可导，两边对 $x$ 求导

$f'(x)=\cos x-f(x) \quad \therefore f'(x)+f(x)=\cos x$

$f(x)=e^{-\int dx}[C+\int\cos x e^{\int dx}dx]=Ce^{-x}+\frac{\sin x+\cos x}{2}$

令 $x=0$ 则 $f(0)=0 \quad \therefore f(0)=C+\frac{1}{2}=0 \quad \therefore C=-\frac{1}{2}$

$\therefore f(x)=-\frac{1}{2}e^{-x}+\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)$

$=\frac{1}{2}(\cos x+\sin x-e^{-x})$

姓名　　　　班级　　　　学号

## 6.2.3　几类可降阶的高阶微分方程

要求：会用降阶解法解三类方程：$y^{(n)}=f(x)$、$y''=f(x,y')$、$y''=f(y,y')$。

1、求下列方程的通解。

(1) $y''(1+e^x)+y'=0$

解：令 $y'=p(x)$，$y''=p'$，于是有

$\frac{dp}{dx}(1+e^x)+p=0$ 分离变量得 $\frac{dp}{p}=\frac{dx}{1+e^x}$

从而 $\ln|p|=-x+\ln(1+e^x)+C_1 \Rightarrow p=C_2(1+e^{-x})$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=C_2(1+e^{-x}) \Rightarrow dy=C_2(1+e^{-x})dx$

$\Rightarrow y=C_2(x-e^{-x})+C_3$

(2) $y''=1+(y')^2$

解：令 $y'=p(x)$，$y''=p'$ 从而 $\frac{dp}{dx}=1+p^2$

$\Rightarrow \frac{dp}{1+p^2}=dx \Rightarrow \arctan p=x+C_1$

$\Rightarrow p=\tan(x+C_1) \Rightarrow dy=\tan(x+C_1)dx$

$\Rightarrow y=-\ln|\cos(x+C_1)|+C_2$

$=\ln|\sec(x+C_1)|+C_2$

2、求下列微分方程满足初始条件的特解。

(1) $(1-y)y''+2(y')^2=0, y|_{x=1}=2, y'|_{x=1}=-1$

解：令 $y'=p(y)$，则 $y''=p\frac{dp}{dy}$

$\Rightarrow (1-y)p\frac{dp}{dy}+2p^2=0 \Rightarrow \frac{dp}{p}=\frac{2dy}{y-1}$

$\Rightarrow \ln|p|=\ln(y-1)^2+\ln|C_1| \Rightarrow p=C_1(y-1)^2$

又 $y'|_{y=2}=-1$ 即 $p|_{y=2}=-1$ $\therefore C_1=-1$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=-(y-1)^2 \Rightarrow \frac{dy}{(y-1)^2}=dx$

$\Rightarrow \frac{1}{y-1}=x+C_2$ 又 $y|_{x=1}=2 \Rightarrow C_2=0$

$\Rightarrow \frac{1}{y-1}=x \Rightarrow y=1+\frac{1}{x}$

(2) $y''-\frac{1}{x}y'=xe^x, y|_{x=1}=1, y'|_{x=1}=e$

解：令 $y'=p(x)$，则 $y''=p'$

$\Rightarrow \frac{dp}{dx}-\frac{1}{x}p=xe^x$

$\Rightarrow p=e^{\int\frac{1}{x}dx}[C_1+\int xe^x e^{-\int\frac{1}{x}dx}dx]$

$=x(C_1+e^x)$

$\Rightarrow y'=x(C_1+e^x)$ 又 $y'|_{x=1}=e$

$\Rightarrow C_1=0 \Rightarrow y'=xe^x$

$\Rightarrow y=xe^x-e^x+C_2$ 又 $y|_{x=1}=1$

$\Rightarrow C_2=1 \Rightarrow y=e^x(x-1)+1$

# 6.3 高阶线性微分方程

## 6.3.1 高阶线性微分方程解的结构

**要求**：理解线性微分方程解的性质及解的结构定理。

## 6.3.2 常系数线性微分方程

**要求**：熟练掌握二阶线性常系数齐次微分方程的解法；熟练掌握自由项为多项式、指数函数、正弦函数、余弦函数以及它们的和与积的几种线性常系数非齐次方程的解法。

1、填空题

(1) 已知二阶线性非齐次微分方程的三个特解 $y_1=1, y_2=x$，$y_3=x^2$，该方程的通解为 $y=C_1(x-1)+C_2(x^2-1)+1$

(2) 微分方程 $y''-9y=0$ 的通解为 $y=C_1e^{3x}+C_2e^{-3x}$；

(3) 微分方程 $y''-4y'=0$ 的通解为 $y=C_1+C_2e^{4x}$；

(4) 微分方程 $y''-2y'+y=0$ 的通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{x}$；

(5) 微分方程 $y''+y'+y=0$ 的通解为 $y=e^{-\frac{1}{2}x}(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x)$

2、求下列微分方程的通解

(1) $y'''+y'=0$

解：$r^3+r=0 \Rightarrow r_1=0$，$r_{2,3}=\pm i$

$y=C_1+C_2\cos x+C_3\sin x$

(2) $y''+2\lambda y'+y=0$ （$\lambda$ 为实常数）

解：$r^2+2\lambda r+1=0$

$\Delta=4\lambda^2-4$

(i) 当 $\lambda^2>1$ 时 $r_1=-\lambda+\sqrt{\lambda^2-1}$，$r_2=-\lambda-\sqrt{\lambda^2-1}$

$\therefore y=C_1e^{(-\lambda+\sqrt{\lambda^2-1})x}+C_2e^{(-\lambda-\sqrt{\lambda^2-1})x}$

(ii) 当 $\lambda^2=1$ 时，$r_1=r_2=-\lambda$ $\therefore y=(C_1+C_2x)e^{-\lambda x}$

(iii) 当 $\lambda^2<1$ 时，$r_{1,2}=-\lambda\pm i\sqrt{1-\lambda^2}$ $\therefore y=e^{-\lambda x}(C_1\cos\sqrt{1-\lambda^2}x$

3、写出下列方程含待定系数的特解形式（无需求出系

(1) $y''-9y=x^2e^{3x}$；

$y^*=xe^{3x}(ax^2+bx+c)$

(2) $y''-8y'+20y=5xe^{4x}\sin 2x$

$y^*=xe^{4x}[(ax+b)\cos 2x+(cx+d)\sin 2x]$

(3) $y''-2y'+y=e^x\sin x$；

$y^*=e^{x}(a\cos x+b\sin x)$

(4) $y''-2y'+2y=e^x+x\cos x$；

$y^*=ce^{x}+(ax+b)\cos x+(dx+g)\sin x$

第 6 章

4、求

(1) $y''$

解：

$\lambda=0$

设

$4b$

$\therefore$ 特

(2) $y''$

解：

$\therefore$

设

(3) $y''$

解：

对

设特

4、求下列方程的通解。

(1) $y''-4y'+4y=x$

解：$r^2-4r+4=0$，$r_1=r_2=2$

∴齐次通解为 $Y=(C_1+C_2x)e^{2x}$

$\lambda=0, m=1$ 不是特征方程的根.

设所求特解为 $y^*=b_0x+b_1$，代入方程得

$4b_0x-4b_0+4b_1=x$ ∴ $\begin{cases}4b_0=1\\4b_1-4b_0=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b_0=\frac{1}{4}\\b_1=\frac{1}{4}\end{cases}$

∴特解 $y^*=\frac{1}{4}(1+x)$ ∴通解 $y=(C_1+C_2x)e^{2x}+\frac{1}{4}(1+x)$

(2) $y''-4y'+4y=e^{2x}$；

解：特征方程 $r^2-4r+4=0\Rightarrow r_{1,2}=2$

∴齐次通解为 $Y=(C_1+C_2x)e^{2x}$

设特解 $y^*=x^2Ae^{2x}$ 代入方程整理得

$2Ae^{2x}=e^{2x}\Rightarrow A=\frac{1}{2}$

∴通解 $y=(C_1+C_2x)e^{2x}+\frac{1}{2}x^2e^{2x}$

(3) $y''+y'=\sin x$

解：$r^2+r=0\Rightarrow r_1=0, r_2=-1$

齐次通解为 $Y=C_1+C_2e^{-x}$

设特解为 $y^*=a\cos x+b\sin x$ 代入方程得 $a=-\frac{1}{2}$，$b=-\frac{1}{2}$

∴ $y^*=-\frac{1}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x$

∴ $y=C_1+C_2e^{-x}-\frac{1}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x$

5、求下列方程满足给定初值条件的特解。

(1) $y''+2y'+2y=xe^{-x}$，$y(0)=0, y'(0)=0$

解：特征方程为 $r^2+2r+2=0\Rightarrow r_{1,2}=-1\pm i$

齐次通解为 $Y=e^{-x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$

$\lambda=-1$ 不是特征根，设所求特解为 $y^*=e^{-x}(b_0x+b_1)$

代入方程得 $b_0=1, b_1=0$ 特解为 $y^*=e^{-x}(x+0)=xe^{-x}$

∴通解为 $y=e^{-x}(C_1\cos x+C_2\sin x)+xe^{-x}$

由 $y(0)=0$，$y'(0)=0\Rightarrow\begin{cases}C_1=0\\C_2-C_1+1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_1=0\\C_2=-1\end{cases}$

∴ $y=-e^{-x}\sin x+xe^{-x}=e^{-x}(x-\sin x)$

(2) $y''+9y=\cos x$，$y(\frac{\pi}{2})=y'(\frac{\pi}{2})=0$

解：$r^2+9=0\Rightarrow r_{1,2}=\pm3i\Rightarrow$ 齐次通解 $Y=C_1\cos3x+C_2\sin3x$

设 $y^*=a\cos x+b\sin x$ 代入得 $a=\frac{1}{8}$，$b=0$

∴通解为 $y=C_1\cos3x+C_2\sin3x+\frac{1}{8}\cos x$

由 $y(\frac{\pi}{2})=y'(\frac{\pi}{2})=0$ 有 $\begin{cases}-C_2=0\\3C_1-\frac{1}{8}=0\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}C_1=\frac{1}{24}\\C_2=0\end{cases}$

$\Rightarrow$ 解为 $y=\frac{1}{24}\cos3x+\frac{1}{8}\cos x$

### 6.3.3 欧拉方程

**要求**：掌握欧拉方程的解法。

求下列方程的解。

1、$x^2y''-4xy'+6y=x$

解：令 $x=e^t$ ，则

$D(D-1)y-4Dy-6y=e^t$

$\Rightarrow D^2y-5Dy+6y=e^t$

$\frac{d^2y}{dt^2}-5\frac{dy}{dt}+6y=e^t$

特征方程 $r^2-5r+6=0 \Rightarrow r_1=2, r_2=3$

~~设~~ $y^*=Ae^t$ 代入有 $A=\frac{1}{2}$

$\therefore y^*=\frac{1}{2}e^t$

$\therefore y=C_1e^{2t}+C_2e^{3t}+\frac{1}{2}e^t$

$=C_1x^2+C_2x^3+\frac{1}{2}x$

2、$x^2y''-xy'+4y=x\sin(\ln x)$

解：令 $x=e^t$ 则

$D(D-1)y-Dy+4y=e^t\sin t$

$D^2y-2Dy+4y=e^t\sin t$

$\Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2}-2\frac{dy}{dt}+4y=e^t\sin t$

$r^2-2r+4=0 \Rightarrow r_{1,2}=1\pm\sqrt{3}i$

$\therefore y^*=e^t(A\cos t+B\sin t)$

代入方程得 $A=0$，$B=\frac{1}{2}$

$\therefore y^*=\frac{1}{2}e^t\sin t$

$\therefore y=e^t(C_1\cos\sqrt{3}t+C_2\sin\sqrt{3}t)+\frac{1}{2}e^ts$

$=x[C_1\cos(\sqrt{3}\ln x)+C_2\sin(\sqrt{3}\ln x)]+\frac{1}{2}x\sin$

## 6.4 总习题

1、选择题

(1) 若连续函数满足 $f(x)=\int_0^{2x} f(\frac{t}{2})dt+\ln 2$，则 $f'(x)$（ A ）

（A）$e^{2x}\ln 2$ （B）$2e^{2x}\ln 2$ （C）$e^{x}$ （D）$2e^{2x}$

(2) 微分方程 $y''+y=\cos x$ 的特解形式为（ C ）

（A）$\cos x$ （B）$x^2(a\cos x+b\sin x)$

（C）$x(a\cos x+b\sin x)$ （D）$a\cos x+b\sin x$

2、求下列微分方程通解，或满足给定初值条件的特解。

(1) $(1+e^x)yy'=e^x,\ y(1)=1$ （可分离变量）

解：$ydy=\frac{e^x}{1+e^x}dx \Rightarrow \frac{1}{2}y^2=\ln(1+e^x)+C_1$

由 $y(1)=1 \Rightarrow C=\frac{1}{2}-\ln(1+e)$

$\therefore \frac{1}{2}y^2=\ln(1+e^x)+\frac{1}{2}-\ln(1+e)$

(2) $(x+y\cos(\frac{y}{x}))dx-x\cos(\frac{y}{x})dy=0$ （齐次）

解：$\frac{dy}{dx}=\frac{1+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}}{\cos\frac{y}{x}}$ 令 $u=\frac{y}{x}$ 则

$u+x\frac{du}{dx}=\frac{1+u\cos u}{\cos u} \Rightarrow \cos u\,du=\frac{1}{x}dx$

$\Rightarrow \sin u=\ln|x|+C_1 \quad \therefore \sin\frac{y}{x}=\ln|x|+C_1$

或 $x=Ce^{\sin\frac{y}{x}}$

(3) $(y^2-6x)y'+2y=0$ （线性）

解：$\frac{dx}{dy}-\frac{3}{y}x=-\frac{1}{2}y$

$x=e^{\int\frac{3}{y}dy}\left[\int -\frac{1}{2}ye^{-\int\frac{3}{y}dy}dy+C\right]$

$=y^3\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{y}+C\right)=Cy^3+\frac{1}{2}y^2$

(4) $3xy'-y-2xy^4\ln x=0$ （伯努力）

解：$y'-\frac{1}{3x}y=\frac{2}{3}y^4\ln x$，$n=4$．令 $z=y^{1-4}=y^{-3}$，则有

$z'+\frac{1}{x}z=-2\ln x$

$\therefore y^{-3}=z=e^{-\int\frac{1}{x}dx}\left[\int -2\ln x\, e^{\int\frac{1}{x}dx}dx+C\right]$

$=\frac{1}{x}\left[\int -2x\ln x\,dx+C\right]=\frac{1}{x}(-x^2\ln x+\frac{1}{2}x^2+C)$

$=\frac{x}{2}-x\ln x+\frac{C}{x}$

或 $x=y^3\left[-x^2\ln x+\frac{1}{2}x^2+C\right]$

(5) $x^2y''-(y')^2=0$ （缺y）

解：令 $y'=p(x)$，$y''=p'(x)$ 于是

$x^2p'-p^2=0 \Rightarrow \frac{dp}{p^2}=\frac{dx}{x^2}$

$\Rightarrow -\frac{1}{p}=-\frac{1}{x}+C_1 \Rightarrow p=\frac{x}{1+C_1x}=y'$

$\Rightarrow y=\int\frac{x\,dx}{1+C_1x}=\frac{1}{C_1}\int\frac{C_1x+1-1}{C_1x+1}dx$

$=\frac{x}{C_1}-\frac{1}{C_1^2}\ln(C_1x+1)+C_2$

(6) $y''=2yy', y(0)=y'(0)=1$ （缺 $x$）

解: $y'=p(y)$, $y''=p\frac{dp}{dy}$，则有

$p\frac{dp}{dy}=2yp \Rightarrow dp=2ydy$

$\Rightarrow p=y^2+C_1$ 当 $y=1$ 时 $y'=1$ 于是得 $C_1=0$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=y^2 \Rightarrow \frac{dy}{y^2}=dx \Rightarrow -\frac{1}{y}=x+C_2$

当 $x=0$ 时 $y=1$，于是有 $C_2=-1$

$\therefore -\frac{1}{y}=x-1 \Rightarrow (x-1)y=-1$ 或 $(1-x)y=1$

3、求下列方程的通解（或特解）。

(1) $y''-4y'+4y=3+e^{-2x}$

解: 特征方程 $r^2-4r+4=0$, $r_{1,2}=2$

对应齐次方程通解 $Y=(C_1+C_2x)e^{2x}$

对 $y''-4y'+4y=3$，设特解 $y_1^*=a$ （$\lambda=0$ 不是特征根）

代入得 $a=\frac{3}{4}$ $\therefore y_1^*=\frac{3}{4}$

对 $y''-4y'+4y=e^{-2x}$，设特解 $y_2^*=be^{-2x}$ （$\lambda=-2$ 不是特征根）

代入得 $4be^{-2x}+8be^{-2x}+4be^{-2x}=e^{-2x}$

$b=\frac{1}{16}$ $\therefore y_2^*=\frac{1}{16}e^{-2x}$

$\therefore$ 通解 $y=(C_1+C_2x)e^{2x}+\frac{1}{16}e^{-2x}+\frac{3}{4}$

(2) $y''+y'+y=\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x$

解: 特征方程 $r^2+r+1=0$, $r_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$

对应齐次方程通解 $Y=e^{-\frac{1}{2}x}(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin$

对 $y''+y'+y=\frac{1}{2}$，设特解 $y_1^*=a$ （$\lambda=0$ 不是特

代入得 $a=\frac{1}{2}$，$\therefore y_1^*=\frac{1}{2}$

对 $y''+y'+y=-\frac{1}{2}\cos 2x$，设特解 $y_2^*=A\cos 2x+B$

（$\lambda+i\omega=0+2i$ 不是特征根）

代入得 $A=\frac{3}{26}$，$B=-\frac{1}{13}$

$\therefore$ 通解为 $y=e^{-\frac{1}{2}x}(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x)+\frac{1}{2}+\frac{3}{26}$

(3) $y''-2y'+y=e^x+e^{-x}$, $y(0)=1, y'(0)=2$

解: 特征方程 $r^2-2r+1=0$, $r_{1,2}=1$ （重根）

对应齐次方程通解 $Y=(C_1+C_2x)e^x$

对 $y''-2y'+y=e^x$，设特解 $y_1^*=Ax^2e^x$ （$\lambda=1$ 为重根）

代入 $A(x^2+4x+4)e^x-2A(x^2+2x)e^x+Ax^2e^x=e^x$

得 $A=\frac{1}{2}$ $\therefore y_1^*=\frac{1}{2}x^2e^x$

对 $y''-2y'+y=e^{-x}$ 设特解 $y_2^*=Be^{-x}$ （$\lambda=-1$ 不是特征

代入 $Be^{-x}+2Be^{-x}+Be^{-x}=e^{-x}$ 得 $B=\frac{1}{4}$

$\therefore$ 通解 $y=(C_1+C_2x)e^x+\frac{1}{2}x^2e^x+\frac{1}{4}e^{-x}$

将 $y(0)=1$, $y'(0)=2$ 代入得特解

$y=(\frac{3}{4}+\frac{3}{2}x)e^x+\frac{1}{2}x^2e^x+\frac{1}{4}e^{-x}$

$\int_0^x(x-t)f(t)dt = x\int_0^x f(t)dt - \int_0^x t f(t)dt$

(4) $y''-2y'+2y=4e^x\cos x$，$y(\pi)=0$, $y'(\pi)=-2\pi e^\pi$

解：特征方程 $r^2-2r+2=0$，$r_{1,2}=1\pm i$

对应齐次通解 $Y=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x)$

设特解 $y^*=xe^{-x}(A\cos x+B\sin x)$

($\alpha+i\omega=1+i$ 为特征方程的单根)

代入得 $A=0$, $B=2$

∴通解为 $y=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x)+2xe^x\sin x$

由 $y(\pi)=0$，$y'(\pi)=-2\pi e^\pi$ 得 $C_1=0$，$C_2=0$

∴特解为 $y=2xe^x\sin x$

4、设函数 $f(x)$ 在 $x>0$ 时可微，且满足方程

$f(x)=1+\frac{1}{x}\int_1^x f(t)dt$，求 $f(x)$。

解：由 $f(x)=1+\frac{1}{x}\int_1^x f(t)dt$ 得 $f(1)=1$ 且

$xf(x)=x+\int_1^x f(t)dt$ 两边求导得

$f(x)+xf'(x)=1+f(x)$ ∴ $xf'(x)=1$

∴ $f'(x)=\frac{1}{x}$ ∴ $f(x)=\ln x+C$

又 $f(1)=1$ ∴ $C=1$

∴ $f(x)=\ln x+1$

5、设函数 $f(x)$ 满足 $\int_0^x(x-t)f(t)dt=2x+\int_0^x f(t)dt$，试求 $f(x)$

解：两边求导得：$xf(x)+\int_0^x f(t)dt-xf(x)=2+f(x)$

即 $\int_0^x f(t)dt=2+f(x)$ 且满足 $f(0)=-2$

两边求导得 $f(x)=f'(x)$ 即 $f'(x)-f(x)=0$

∴ $f(x)=Ce^{\int dx}=Ce^x$ 又 $f(0)=-2$ ∴ $C=-2$

∴ $f(x)=-2e^x$

6、由坐标原点向曲线的切线所作垂线之长等于切点的横坐标，求此曲线方程。

解：设曲线方程为 $y=f(x)$，在 $(x,y)$ 处的切线方程为：$Y-y=y'(X-x)$

据题意有 $\frac{|y-xy'|}{\sqrt{1+y'^2}}=x$ 即 $y'-\frac{1}{2x}y=-\frac{x}{2}y^{-1}$ (伯努利方程)

$(x^2(1+y'^2)=(y-xy')^2 \Rightarrow x^2=y^2-2xyy' \Rightarrow y'-\frac{1}{2x}y=-\frac{x}{2x}y^{-1})$

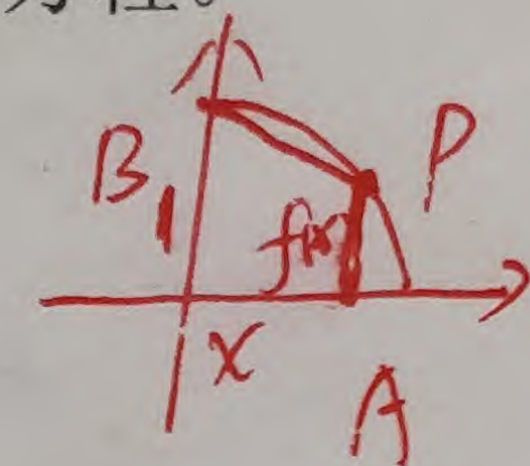
令 $z=y^2$，则 $z'-\frac{1}{x}z=-x$ 从而有

$y^2=z=e^{\int\frac{1}{x}dx}[\int -xe^{-\int\frac{1}{x}dx}dx+C]$

$=x(-x+C)$

7、已知曲线 $c$ 过点 $A(1,0)$ 及 $B(0,1)$，且 $\overset{\frown}{AB}$ 为凸弧，$P$ 为曲线 $c$ 上异于点 $B$ 的任一点，已知弧 $\overset{\frown}{PB}$ 与弦 $\overline{PB}$ 所围成的平面图形的面积等于点 $P$ 的横坐标的立方，求曲线 $c$ 的方程。

解：设曲线为 $f(x)$，据题意有：




$$\int_0^x f(t)dt - \frac{[f(x)+1]x}{2} = x^3$$

求导得 $f(x) - \frac{f(x)+1}{2} - \frac{x}{2}f'(x) = 3x^2$ 且 $f(1)=0$（过A点）

$\left(\frac{1}{2}f(x) - \frac{x}{2}f'(x) = 3x^2 + \frac{1}{2} \Rightarrow xf'(x) - f(x) = -1 - 6x^2 \Rightarrow f'(x) - \frac{1}{x}f(x) = -\frac{1}{x} - 6x\right)$（一阶线性）

整理得 $f'(x) - \frac{1}{x}f(x) = -\frac{1}{x} - 6x$ 且 $f(1)=0$

解得 $f(x) = e^{\int \frac{1}{x}dx}\left[\int\left(-\frac{1}{x} - 6x\right)e^{-\int\frac{1}{x}dx}dx + C\right]$.

$= x\left(\frac{1}{x} - 6x + C\right) = -6x^2 + Cx + 1$

又 $f(1)=0$ 从而 $C=5$

$\therefore f(x) = -6x^2 + 5x + C$，$x \in [0,1]$.

: $f(x) - \frac{f(x)}{2} - \frac{1}{2}f'(x) - \frac{1}{2}$

8、设 $f(x)$ 为连续函数，且满足 $f(x) = \sin x - \int_0^x (x-t)$ 求 $f(x)$。

解：$f(x) = \sin x - x\int_0^x f(t)dt + \int_0^x tf(t)dt$

两边对 $x$ 求导

$f'(x) = \cos x - \int_0^x f(t)dt - xf(x) + xf(x)$

$= \cos x - \int_0^x f(t)dt$

再求导 $f''(x) = -\sin x - f(x)$ 即 $f''(x) + f(x) = -\sin$

特征方程 $r^2+1=0$，$r_{1,2} = \pm i$

对应齐次方程通解 $Y = C_1\cos x + C_2\sin x$

$\lambda \pm i\omega = \pm i$ 是单根，设特解 $y^* = x(A\sin x + B$

代入 $2A\cos x - 2B\sin x = -\sin x$

得 $A=0$，$B=\frac{1}{2}$

$\therefore f(x) = Y + y^* = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{1}{2}x\cos x$

令 $x=0$ 得 $f(0)=0$ 得 $C_1=0$

令 $f'(0)=1$ 得 $C_2=\frac{1}{2}$

$\therefore f(x) = \frac{1}{2}\sin x + \frac{x}{2}\cos x$

一、

、当

(A

(C

、设

(A

(C

、设

(A)

(C

、已知

(A)

(C)

、函数

(A)

(C)